Die Strahlensätze

Inhaltsverzeichnis

1 Zentrische Streckungen

Definition 1.1. *Eine **zentrische Streckung** ist eine Abbildung, bei der Original- und Bildstrecken **parallel** (aber nicht unbedingt gleich lang) sind, und die keine Parallelverschiebung ist. Für zwei Bildpunkte A' und B' gilt also:*

$$A'B' \parallel AB, \text{ aber im Allgemeinen } \overline{A'B'} \neq \overline{AB}.$$

Warum Parallelverschiebungen ausgenommen sind, wird in Satz 1.2 klar.

Eine zentrische Streckung ist durch die Vorgabe einer Originalstrecke $[AB]$ und ihres Bildes $[A'B']$ **eindeutig** festgelegt, denn es gilt:

Satz 1.1. *Gegeben vier Punkte A, B, A' und B' mit $A'B' \parallel AB$ aber $\overline{A'B'} \neq \overline{AB}$, so gibt es genau eine zentrische Streckung, so dass A' das Bild von A und B' das Bild von B ist.*

Beweis. Wähle einen beliebigen Punkt P (Abb. 1.1). Dann kann der Bildpunkt P' so gefunden werden: Wegen $A'P' \parallel AP$ liegt P' auf g, der Parallelen zu AP durch A'. Da auch $B'P' \parallel BP$ ist, liegt P' auf h, der Parallelen zu BP durch B'. Also ist P' der eindeutige Schnittpunkt von g und h: $\{P'\} = g \cap h$. (Die Geraden g und h schneiden sich tatsächlich, da ihre Parallelen AP und BP es tun.) □

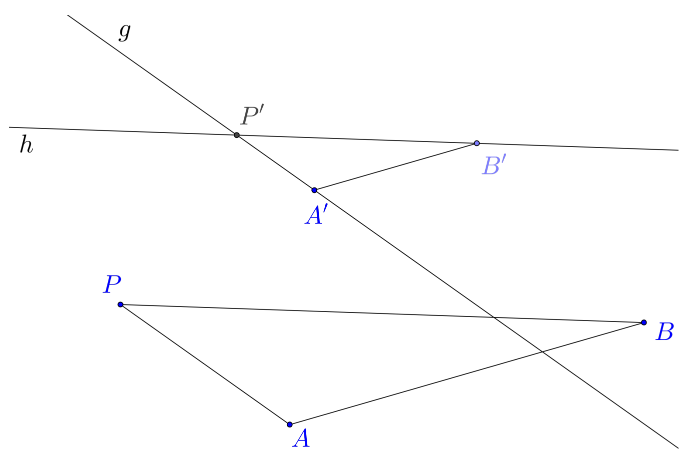


Abbildung 1.1: Eindeutigkeit einer zentrischen Streckung

Satz 1.2. *Betrachte eine Strecke* $[AB]$ *und ihr Bild* $[A'B']$ *unter einer zentrischen Streckung. Dann bleibt der Schnittpunkt* $\{Z\} = AA' \cap BB'$ *unter der zentrischen Streckung unverändert, d. h. es ist* $Z' = Z$ *(Abb. 1.2).*

Beweis. Da wir Parallelverschiebungen ausgeschlossen haben, sind die Geraden AA' und BB' nicht parallel, also existiert der Punkt Z tatsächlich. Suchen wir seinen Bildpunkt Z'. Wegen der Parallelitätsbedingung $A'Z' \parallel AZ$ und $AZ = AA'$ muss Z' auf der Geraden AA' liegen. Ebenso muss Z' aber auch auf BB' liegen (da $B'Z' \parallel BZ$ und $BZ = BB'$). Also ist $Z' = Z$. □

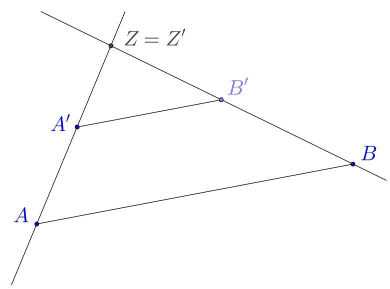


Abbildung 1.2: Der Punkt Z ist sein eigener Bildpunkt

Kombinieren wir nun die Konstruktionen in den Abb. 1.1 und 1.2. Es scheint, dass auch die Gerade PP' durch Z verläuft, egal wie P gewählt ist.

Satz 1.3. *Bei einer zentrischen Streckung verlaufen die Verbindungsgeraden von Original- und Bildpunkten allesamt durch denselben Punkt, das* ***Streckzentrum*** Z *(Abb. 1.3).*

Beweis. Wähle den Originalpunkt P beliebig. Die Parallelitätsbedingung sagt uns, dass $P'Z' \parallel PZ$. Andererseits ist $Z' = Z$, also sind PZ und $P'Z$ parallel. Daher liegt P' auf der Geraden PZ, bzw. Z auf der Geraden PP'. □

Mit dieser Erkenntnis gestalten sich Streckkonstruktionen etwas einfacher: anstatt zweier Parallelen zu Originalstrecken muss nur eine gezogen werden, die dann mit der Geraden PZ geschnitten wird.

Weiterhin gibt es zwei Arten von zentrischen Streckungen: diejenigen, die Punkte auf dieselbe Seite von Z abbilden (P' liegt zwischen P und Z) und diejenigen, die auf die andere Seite abbilden (Z liegt zwischen P und P'). Aus Gründen, die später klar werden, nennen wir die erste Art die **positiven** zentrischen Streckungen und die zweite die **negativen**.

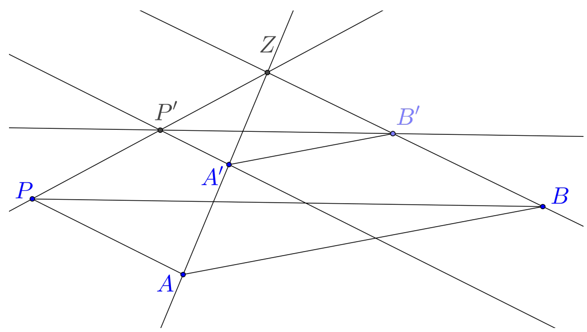
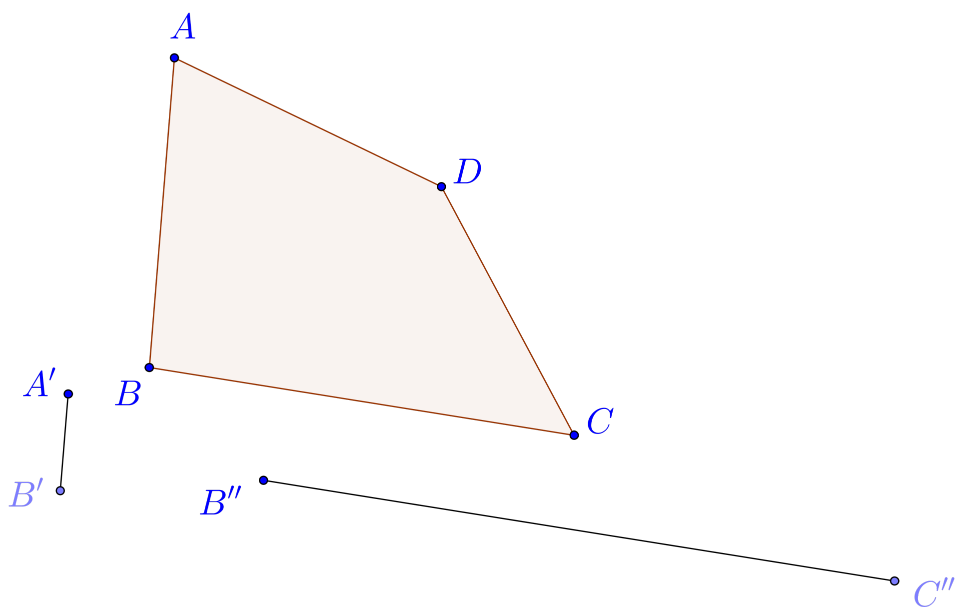
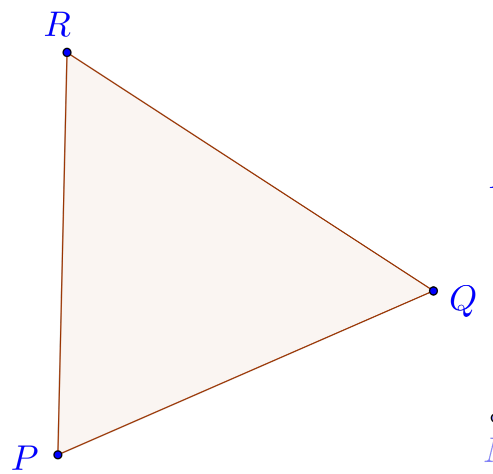


Abbildung 1.3: Jede andere Gerade PP' verläuft auch durch den Punkt Z

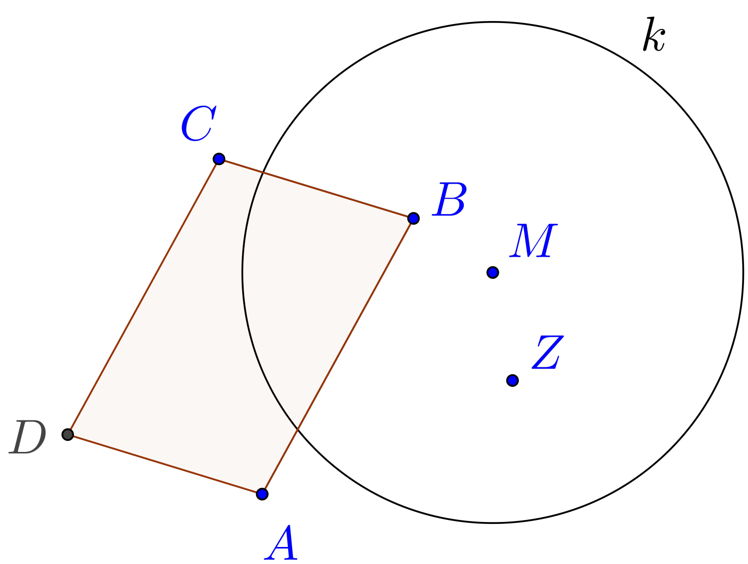
Übung 1.1. *Das Viereck $ABCD$ wird auf zwei verschiedene Arten zentrisch gestreckt. Jeweils ist das Bild einer Seite gegeben. Vervollständige die Bildvierecke und finde die Streckzentren.*



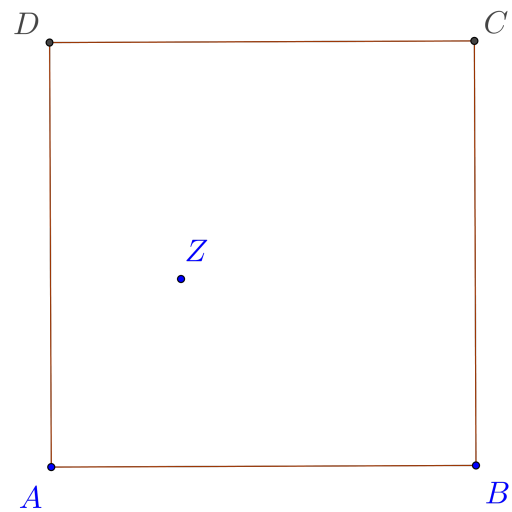
Übung 1.2. *Die Strecke $[MN]$ ist parallel zur Strecke $[PR]$. Konstruiere die Bilder des Dreiecks PQR unter allen zentrischen Streckungen, bei denen $[MN]$ das Bild von $[PR]$ ist.*



Übung 1.3. *Konstruiere das Bild des Parallelogramms $ABCD$ unter einer zentrischen Streckung mit Zentrum Z, so dass B' auf k liegt. Es gibt zwei Möglichkeiten, finde beide.*



Übung 1.4. *$ABCD$ ist ein Quadrat. Finde alle möglichen Bildquadrate unter zentrischer Streckung um Z, die mit $ABCD$ überlappende Seiten haben. Wie viele Möglichkeiten gibt es? (Kannst du begründen, warum es immer genau so viele sind?)*



2 Der 1. Strahlensatz

Satz 2.1. *Gegeben seien zwei parallele (und nicht gleich lange) Strecken* $[AB]$ *und* $[A'B']$ *sowie das resultierende Streckzentrum* $\{Z\} = AA' \cap BB'$. *Dann gilt die Proportion:*

$$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}.$$

Beweis. Wir behandeln den Fall einer positiven zentrischen Streckung, bei der A' zwischen A und Z liegt (Ab. 2.1). Die Dreiecke ABA' und ABB' haben dieselbe Seite $[AB]$ und die gleiche Höhe bezüglich dieser Seite (da $A'B' \parallel AB$). Also sind die flächengleich:

$$F(ABA') = F(ABB').$$

Jedes dieser beiden Dreiecke ergänzt sich mit einem anderen zum grossen Dreieck ABZ. Diese komplementären Dreiecke haben also auch denselben Flächeninhalt (Abb. 2.1):

$$F(ZA'B) = F(ZAB').$$

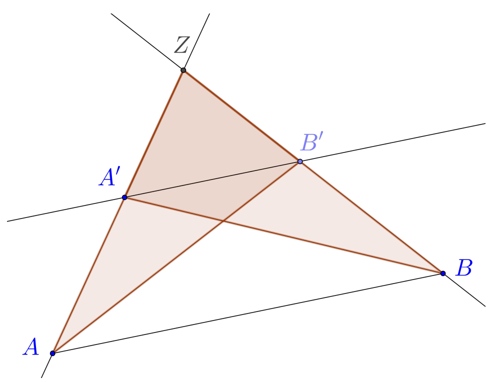


Abbildung 2.1: Die Dreiecke $ZA'B$ und ZAB' haben denselben Flächeninhalt

Das Dreieck $ZA'B$ kann man sich aus dem Dreieck ZAB entstanden vorstellen, indem die Länge der Seite ZA verändert wurde, die Höhe bezüglich dieser Seite aber gleich blieb. Gemäss der Flächenformel $F = \frac{ah_a}{2}$ eines Dreiecks ist F bei gleich bleibender Höhe h_a proportional zur Seite a. Also hat sich beim Übergang von ZA zu ZA' der Flächeninhalt proportional zur Länge der Seite geändert:

$$F(ZA'B) : F(ZAB) = \overline{ZA'} : \overline{ZA}.$$

Analog ist

$$F(ZAB') : F(ZAB) = \overline{ZB'} : \overline{ZB}.$$

Da nun aber die Dreiecke $ZA'B$ und ZAB' flächengleich sind, sind die linken Seiten dieser Gleichungen identisch. Das Verhältnis in beiden Proportionen ist also dasselbe: $\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$.

Der Beweis im Fall, dass A' auf der anderen Seite von A liegt wie Z, ist identisch. Der Beweis im Fall einer negativen zentrischen Streckung ist sehr ähnlich (Übung).

□

Das Längenverhältnis des 1. Strahlensatzes ist eine Eigenschaft der zentrischen Streckung, und unabhängig von der gewählten Originalstrecke $[AB]$. Denn stellt man sich die Abb. 2.1 um einen Punkt P ergänzt vor, so ist wegen $A'P' \parallel AP$ auch $\overline{ZP'} : \overline{ZP} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$.

Der 1. Strahlensatz kann auch ohne Bezug auf eine zentrische Streckung formuliert werden:

Satz 2.2. *Gegeben seien drei Punkte A, B und O sowie eine Parallele g zu AB, die OA in C und OB in D schneidet (Abb. 2.2). Dann gilt die Proportion $\overline{OC} : \overline{OA} = \overline{OD} : \overline{OB}$.*

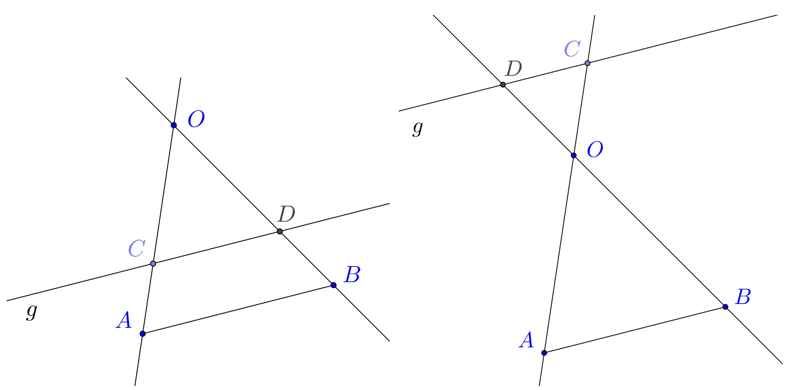


Abbildung 2.2: Im Fall $C \in [OA]$ werden die Strecken $[OA]$ und $[OB]$ durch die Parallele g im gleichen Verhältnis geteilt. Im Fall $O \in [AC]$ teilt der Schnittpunkt O die Strecken $[AC]$ und $[BD]$ im gleichen Verhältnis.

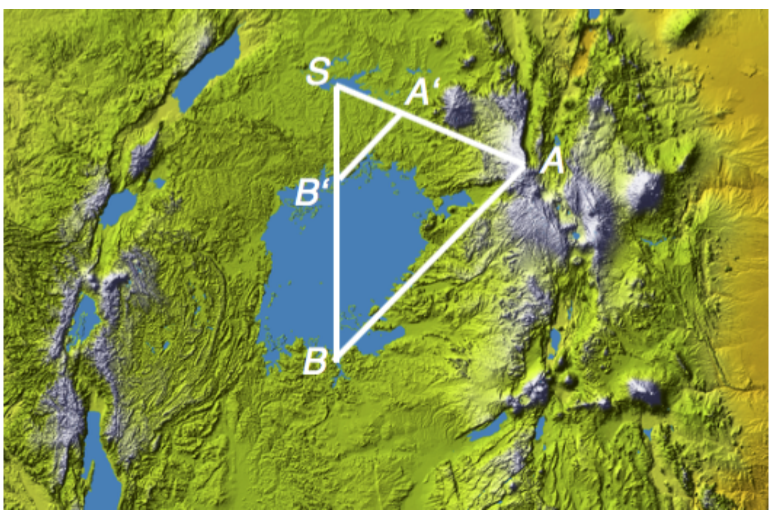
Übung 2.1. *Beweise den 1. Strahlensatz für eine negative zentrische Streckung.*

Übung 2.2. *Zeige, dass in den Konfigurationen in Abb. 2.2 auch die folgenden Proportionen gelten:*

$$\overline{OC} : \overline{OD} = \overline{OA} : \overline{OB}, \qquad \overline{OA} : \overline{OC} = \overline{OB} : \overline{OD},$$
$$\overline{CA} : \overline{OA} = \overline{DB} : \overline{OB}, \qquad \overline{AC} : \overline{OC} = \overline{BD} : \overline{OD}.$$

Übung 2.3. *Doktor Livingstone begibt sich nach Ostafrika, um das Gebiet um den Victoria-See zu vermessen. Mittels Peilung werden der Punkt B' zwischen S und B und der Punkt A' zwischen S und A im Gelände markiert Dabei wird A' so gewählt, dass $\angle SA'B' = \angle SAB$. Längenmessungen der Landstrecken ergeben:*

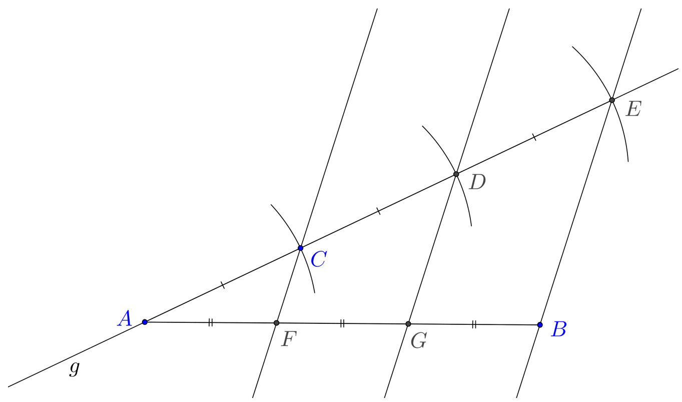
$$\overline{SB'} = 156 \text{ km}, \quad \overline{SA'} = 108 \text{ km}, \quad \overline{AA'} = 191 \text{ km}.$$



Wie breit ist der Victoria-See in Nord-Süd-Richtung (Länge $\overline{BB'}$)?

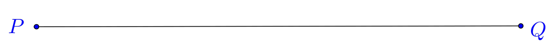
Übung 2.4.

(a) *Eine Strecke* $[AB]$ *soll in 3 gleich lange Teile unterteilt werden. Erkläre die Konstruktionsschritte in der Figur, und warum sie zum Ergebnis führen.*



(b) *Wie kann eine Strecke in* n *gleich lange Teile unterteilt werden? (*n *ist eine beliebige natürliche Zahl)*

(c) *Teile die Strecke* $[PQ]$ *im Verhältnis 2 zu 3, d. h. konstruiere den Punkt* $R \in [PQ]$*, für den* $\overline{PR} : \overline{RQ} = 2 : 3$.



3 Der Streckfaktor

Eine zentrische Streckung ist durch drei Angaben eindeutig festgelegt:

- Das Streckzentrum Z legt fest, auf welcher Geraden der Bildpunkt P' eines beliebigen Originalpunkts P liegt (nämlich auf PZ).
- Das Längenverhältnis $\overline{ZP'} : \overline{ZP}$ bestimmt, wie weit P' von Z entfernt ist.
- Die Angabe, ob es eine positive oder negative zentrische Streckung ist, legt fest, auf welcher Seite von Z der Bildpunkt P' abzutragen ist.

Die letzten beiden Eigenschaften werden im **Streckfaktor** kombiniert:

Definition 3.1. *Der* ***Streckfaktor*** *einer zentrischen Streckung ist die reelle Zahl*

$$k = \pm \frac{\overline{ZP'}}{\overline{ZP}},$$

wobei P ein beliebiger Originalpunkt ist und das Vorzeichen angibt, ob es sich um eine positive (+) oder negative (−) zentrische Streckung handelt.

Jeder mögliche Wert von k weist einem Originalpunkt P einen anderen Bildpunkt P' auf der Geraden ZP zu. Die Gerade wirkt also wie ein Zahlenstrahl, auf dem das Streckzentrum Z der Zahl 0 und P der Zahl 1 entspricht (Abb. 3.1).

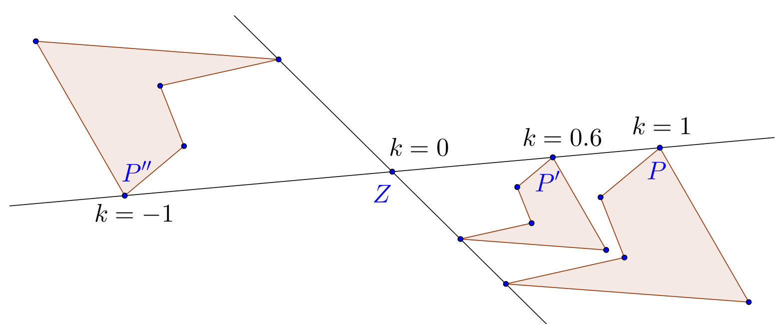


Abbildung 3.1: Der Streckfaktor k bestimmt die Lage von P' auf der Geraden ZP. Jedem Wert k auf dem reellen Zahlenstrahl entspricht ein Punkt P' auf ZP. Seine Entfernung zum Streckzentrum ist $|k|\overline{ZP}$.

Satz 3.1.

(a) *Eine zentrische Streckung mit Streckfaktor −1 ist eine Punktspiegelung.*

(b) *Die Umkehrung einer zentrischen Streckung mit Streckfaktor k ist eine zentrische Streckung mit demselben Streckzentrum und Streckfaktor $\frac{1}{k}$.*

(c) *Die Kombination zweier zentrischer Streckungen mit demselben Streckzentrum Z und Streckfaktoren k_1, k_2 ist eine zentrische Streckung mit Streckzentrum Z und Streckfaktor k_1k_2 (Reihenfolge egal).*

Beweis. Übung. □

Übung 3.1. *Stell dir vor, jemand versteht den Satz 3.1 nicht. Wie würdest du ihm oder ihr die einzelnen Aussagen erklären bzw. beweisen?*

Übung 3.2.

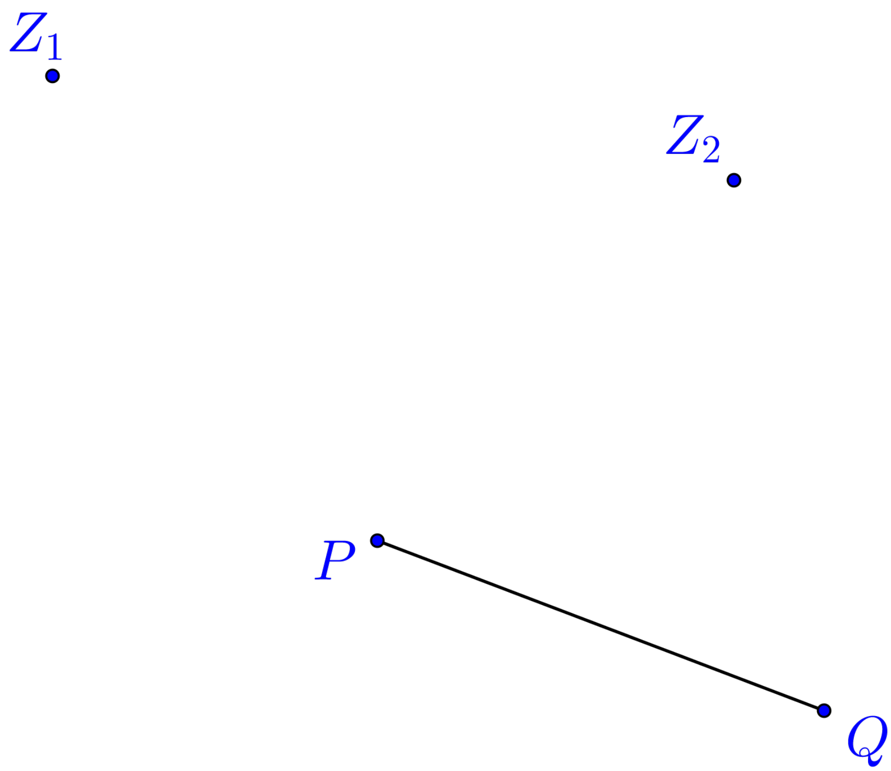
(a) *Begründe, warum die Kombination zweier zentrischer Streckungen mit verschiedenen Streckzentren in der Regel auch wieder eine zentrische Streckung ist.*

(b) *Es gibt einen Sonderfall, wann tritt er ein und was für eine Abbildung ergibt sich dann?*

(c) *Strecke in der Figur auf der nächsten Seite die Strecke $[PQ]$ zuerst an Z_1 mit Streckfaktor $k_1 = \frac{1}{2}$, und das Bild anschliessend an Z_2 mit Streckfaktor $k_2 = -\frac{3}{4}$. Konstruiere daraus das Streckzentrum der kombinierten Abbildung.*

(d) *Wie (c), nur führe nun die Streckungen in der umgekehrten Reihenfolge aus.*

(e) *Zeige, dass die so konstruierten Streckzentren beide auf der Geraden Z_1Z_2 liegen.*


Z_1
Z_2
P
Q