Theorie: Quadratische Funktionen

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlenfolgen und ihre Differenzen

Definition. *In einer Zahlenfolge heissen die Differenzen benachbarter Zahlen* ***Differenzen 1. Ordnung****. Die Differenzen davon heissen* ***Differenzen 2. Ordnung*** *der ursprünglichen Folge, usw.*

- *Eine Folge, deren Differenzen 1. Ordnung konstant sind, heisst 1. Grades (linear).*
- *Eine Folge, deren Differenzen 2. Ordnung konstant sind, heisst 2. Grades (quadratisch).*
- *Eine Folge, deren Differenzen 3. Ordnung konstant sind, heisst 3. Grades (kubisch), usw.*

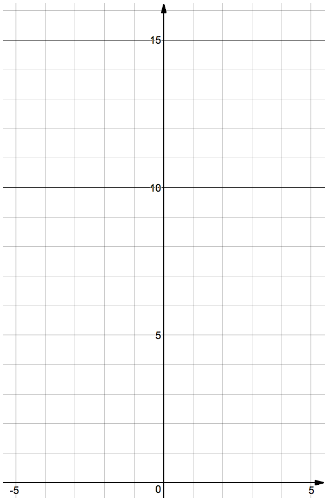
Satz. *In einer quadratischen Folge kann jedes Glied als Term in seiner Position n ausgedrückt werden ("Formel" der Folge). Dieser Term ist quadratisch in n, d. h. von der Form*

$$an^2 + bn + c.$$

2 Parabeln

Definition. *Eine* ***Parabel*** *ist eine Kurve, entlang der die Differenzen 1. Ordnung (in vertikaler Richtung) eine lineare Folge bilden.*

Satz. *Der Graph der Funktion* $y = x^2$ *ist eine Parabel. Wir nennen sie die* ***Normalparabel****. Ihr Scheitelpunkt liegt in* $(0 \mid 0)$.



3 Einfache quadratische Funktionen

Definition. *Eine Funktion f, deren Term quadratisch, also von der Form*

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

*ist, heisst **quadratische Funktion**.*

Satz. *Der Graph einer Funktion der Form*

$$f(x) = (x - u)^2 + v$$

ist eine Normalparabel, die in den Scheitelpunkt $(u \mid v)$ verschoben ist.

- *Ist $v < 0$, dann schneidet der Graph die x-Achse in zwei Punkten **(Nullstellen)**: in $x_1 = u - \sqrt{|v|}$ und in $x_2 = u + \sqrt{|v|}$. Sie liegen spiegelsymmetrisch um die **Scheitelachse** $x = u$.*
- *Ist $v = 0$, dann berührt der Graph die x-Achse im Scheitelpunkt.*
- *Ist $v > 0$, dann trifft der Graph die x-Achse nicht.*

4 Allgemeine quadratische Funktionen

Satz. *Der Graph einer Funktion der Form*

$$f(x) = a(x-u)^2 + v$$

ist eine Parabel, die in den Scheitelpunkt $(u \mid v)$ *verschoben ist.*

- *Wenn* $a > 0$*, dann ist die Parabel nach oben geöffnet. Wenn* $a < 0$*, dann ist sie nach unten geöffnet.*
- *Wenn* $|a| > 1$*, dann ist die Parabel enger als die Normalparabel. Wenn* $|a| < 1$*, dann ist sie weiter.*
- *Ist* $\frac{v}{a} < 0$*, dann schneidet der Graph die* x*-Achse in zwei Punkten* ***(Nullstellen)****: in* $x_1 = u - \sqrt{\left|\frac{v}{a}\right|}$ *und in* $x_2 = u + \sqrt{\left|\frac{v}{a}\right|}$*. Sie liegen spiegelsymmetrisch um die* ***Scheitelachse*** $x = u$*.*
- *Ist* $v = 0$*, dann berührt der Graph die* x*-Achse im Scheitelpunkt.*
- *Ist* $\frac{v}{a} > 0$*, dann trifft der Graph die* x*-Achse nicht.*

Satz. *Der Graph der allgemeinen quadratischen Funktion*

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

ist eine Parabel. Ihre Scheitelachse ist $x = -\frac{b}{2a}$.

- *Wenn* $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, *dann schneidet der Graph die* x*-Achse in zwei Nullstellen, den Lösungen der quadratischen Gleichung* $ax^2 + bx + c$.
- *Wenn* $\Delta = 0$, *dann berührt der Graph die* x*-Achse im Scheitelpunkt.*
- *Wenn* $\Delta < 0$, *dann trifft der Graph die* x*-Achse nicht.*

Definition.

- *Die **Standardform** einer quadratischen Funktion ist* $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- *Die **Scheitelpunktform** einer quadratischen Funktion ist* $f(x) = a(x-u)^2+v$. *Jede quadratische Funktion kann in Scheitelpunktform geschrieben werden.*
- *Die **Nullstellenform** einer quadratischen Funktion ist* $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. *Nicht jede quadratische Funktion kann in Nullstellenform geschrieben werden.*

5 Quadratische Optimierung

In vielen Situationen, die durch eine Funktion modelliert werden können, ist der grösstmögliche oder kleinstmögliche Funktionswert von besonderem Interesse. Wird ein Variablenwert gesucht, bei dem eine Funktion ein Maximum bzw. Minimum annimmt, so nennt man das ein **Optimierungsproblem**. Hier untersuchen wir die Optimierung quadratischer Funktionen, was wir ja schon mathematisch gelöst haben.

Der Sammelbegriff für einen Extremwert einer Funktion (Maximum oder Minimum) ist **Extremum** oder auch **Optimum** (lat. *optimus*: am Besten).

Das allgemeine Vorgehen bei einem quadratischen Optimierungsproblem ist:

- Wähle eine Variable x.
- Identifiziere die Zielfunktion $f(x)$.
- Finde eine Gleichung für die Zielfunktion. (Das sollte eine quadratische Funktion ergeben. Wenn nicht, suche nach einer passenderen Variablen x.)
- Finde das Extremum (also den Scheitelpunkt) der Zielfunktion f.