Mentorierte Arbeit zum Thema: Eine tabellenbasierte Lösungsmethode für Textaufgaben

B. Hambrecht
Matrikelnr. 00-806-273

1. Oktober 2012

Zusammenfassung

Diese Arbeit präsentiert ein Verfahren zum Lösen von Textaufgaben, die lineare Gleichungen in einer Unbekannten einkleiden (Sekundarstufe I). Das Verfahren nutzt Tabellen als vereinheitlichende Darstellungsform für Aufgaben aus sehr verschiedenen Kontexten, um Wissenstransfer bei den Schülern zu aktivieren. Die Abstraktion vom Kontext zur algebraischen Struktur soll erleichtert werden, indem semantische und syntaktische Ebene stärker getrennt zu Tage treten.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Textaufgaben kann man als das "Sorgenkind" der Schulmathematik bezeichnen, denn dieser Aufgabentyp bereitet traditionell den meisten Schülern Schwierigkeiten, und in der Fachdidaktik mangelt es an einer aussagekräftigen Diagnostik, um diesen effektiv entgegen zu wirken. Selbst für Schüler, die den Formalismus der Algebra beherrschen, d. h. Gleichungen lösen können, stellt das Aufstellen eben dieser anhand eines Aufgabentextes eine grosse Hürde dar. Mit anderen Worten sind die Schwierigkeiten nicht allein innermathematischer Natur, die allein mit einer Durchdringung des Variablenbegriffs behoben wären. Vielmehr sind viele Schüler schon mit der Modellbildung, dem Überführen der Realsituation in eine mathematische Formulierung, überfordert. Dies ist umso irritierender für den Didaktiker, als Schüler Selbsteinschätzungen wie diese liefern: "Aber wenn Sie es erklären, ist es klar!"[1] Gross ist seit dem "PISA-Schock" auch die Versuchung, die Wurzel des Problems in der mangelnden Lesekompetenz zu sehen und den schwarzen Peter den Deutschlehrern zuzuschieben.

Nach einer kurzen Darstellung der Antworten der Didaktik auf das Problem der Textaufgaben gehen wir auf den zentralen Begriff der Darstellungsform ein. Die in dieser Arbeit vorgelegte Unterrichtseinheit nutzt die wenig beachtete Darstellungsform der Tabelle, um die Mathematisierung verschiedener Textaufgaben einheitlich zu gestalten.

2 Bestehende didaktische Ansätze

Ein prominenter Ansatz ist die von G. Pólya vorgeschlagene allgemeine Heuristik des Problemlösens [1]. Im Zwiegespräch leitet die Lehrperson den Gedankengang des Schülers in jene Richtung, die ihm ermöglicht, die korrekte Modellierung mit minimaler Anleitung zu erreichen. Fragen wie "Was ist die Unbekannte? Was ist gegeben? Was ist die Bedingung?" zielen auf die algebraische Formulierung ab, während andere auf lösbare Teilprobleme oder bekannte Variationen des Ausgangsproblems hinauslaufen.

Dem gegenüber zu stellen ist die Lehrmeinung, dass Lernerfolg primär über Transferleistungen erfolgt, und Schüler daher am Besten von vorgelösten Musterbeispielen lernen [2, 3, 4]. Wissenskonstruktion würde auch hier stattfinden, aber auf eine effizientere Art, da sie den Schülern das Wiederholen aller Irrtümer der Mathematikgeschichte erspart. Schliesslich können nur so, also mit viel Anleitung, die Schüler den rieseigen Erfahrungsschatz ansammeln, der zur Lösekompetenz mathematischer Probleme nötig ist. Heuristische Strategien können diesen nur aktivieren, aber nicht ersetzen.

Trotz dieser Kritik sei noch ein weiteres "minimal-invasives" Unterrichtskonzept genannt. Der Mathematiklehrer Dan Meyer [5, 6] vertritt die Meinung, dass Schüler der Mittelstufe durchaus in der Lage sind, Realsituationen aktiv zu mathematisieren – wenn sie mit vereinten Kräften, also in Gruppen arbeiten und durch einen interessanten Kontext

[1] aus eigener Erfahrung des Autors

motiviert sind. Seine Unterrichtssequenzen namens “Three-Act Math” sind grafisch ansprechend präsentierte Probleme (z. B. Fermiaufgaben) und jenseits des in vielen Schulbüchern auftretenden “Pseudokontexts” eingekleideter Aufgaben.

3 Vielfalt der Darstellungsformen

Ein zentraler Begriff, der in der Formulierung der PISA-Kompetenzniveaus für Mathematik [7] auftritt, ist jener der *Darstellungsform*:

> N2: “…eine einzelne Darstellungsform verstehen.”
>
> N3: “Darstellungen verwenden und interpretieren, …”
>
> N4: “Verschiedene Darstellungsformen wählen und integrieren…”
>
> N5: “Mit geeigneten Darstellungsformen auf Situationen bezogenes Wissen anwenden, …”
>
> N6: “Zwischen verschiedenen Informationsquellen und Darstellungsformen Verbindungen herstellen und sie flexibel aufeinander übertragen.”

Es ist festzuhalten, dass

- ein mathematischer Sachverhalt auf verschiedene Weisen dargestellt werden kann, und
- dass eine gute Darstellungsform viele anscheinend grundverschiedene Situationen vereinheitlicht repräsentiert.

Eine Vielfalt der Darstellungsformen ist ohne Zweifel der Modellbildung zuträglich. Auch der Keim mancher Revolution in der Mathematik steckte im Wechsel der Darstellungsform, z. B. läutete Descartes’ Darstellung einer quadrierten Grösse als Strecke (y-Koordinate der Funktion $x \mapsto x^2$) anstatt als Fläche die Analysis ein. Schnell wird diese Vielfalt im Unterricht nicht gepflegt, aus Furcht die Schüler zu überfordern und in dem Bestreben, den Fokus auf Standardverfahren zu lenken. Diese Strategie gerät bei Textaufgaben an ihre Grenzen, denn für sie kann es kein “one size fits all” geben. Die Lösekompetenz besteht gerade im selbstständigen Übergang von einer Darstellungsform (Text) in eine andere (Arithmetik/Algebra).

Der Reflex zum Umformulieren mathematischer Probleme sollte durch entsprechenden Aufgaben (z. B. Selbsterklärungsaufgaben) den Schülern antrainiert werden, damit sie darauf als aktive Kompetenz zurückgreifen können. Neben den Ausgangsform (Text) und Zielform (Gleichung/Rechnung) einer Textaufgabe gibt es noch weitere, die zur Überführung der ersten in die zweite hilfreich sein können. Beispiele:

Rechnung Nr. 132 Datum: 08.12.2008

Tisch 1

Anz.	Artikel	Preis	Gesamt
2	Hefeweizen	3,80	7,60
1	Früchtesorbet	4,75	4,75
1	Lachsfilet	9,31	9,31

Rechnungsbetrag 21,66 €
Netto 18,20 €
Enthaltene MwSt.
19 % aus 21,66 € = 3,46 €

Abbildung 1: Restaurantrechnung (Quelle: *www.posbill.com*)

- “Mach eine Zeichung!” riet schon Pólya – diese muss nicht unbedingt geometrisch abstrahiert sein
- Handgesten können beim (Selbst-)Erklären helfen
- Kurznotationen der Textinformationen, inkl. Pfeilen o. ä.
- Wortgleichungen, d. h. Gleichungen mit Wörtern für gesuchte (oder bekannte) Grössen

4 Eine unterschätzte Darstellungsform: Tabellen

Betrachtet man eine Rechnung, wie sie z. B. in Restaurants ausgestellt wird (s. Abb. 1), so fällt auf, dass eine ganze Reihe arithmetischer Verknüpfungen hier nicht explizit ausgeschrieben, sondern durch räumliche Lage ausgedrückt werden: in der ersten Zeile die Multiplikation $2 \cdot 3,80 = 7,60$ und in der letzten Spalte die Addition $7,60 + 4,75 + 9,31 = 21,66$ (Summe nach links verrückt). Würden eine oder mehrere[2] der Angaben fehlen, könnten sie leicht wieder rekonstruiert werden.

Die Darstellungsform der Tabelle kann auch auf andere Kontexte übertragen werden. Als Beispiel dienen die folgenden zwei Aufgaben, die rein arithmetisch lösbar sind. In

[2]Bis zu 4, da es 4 arithmetische Verknüpfungen sind, 3 Multiplikationen und 1 Addition.

der ausgearbeiteten Unterrichtseinheit wird das Aufstellen von Gleichungen mit Hilfe der Tabellenmethode illustriert.

4.1 Beispielaufgabe: Radfahrerin

> *Eine Radfahrerin benötigt für den ersten Teil einer Strecke 15 min, wenn sie mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h fährt. Berechne, wie schnell sie die zweite Teilstrecke von 10 km Länge zurücklegen muss, damit ihre Durchschnittsgeschwindigkeit für die ganze Strecke 22,5 km/h beträgt.*

Als Tabelle sieht dies so aus:

	Zeit (h)	Geschwindigkeit (km/h)	Strecke (km)
erste Strecke:	0,25	24	
zweite Strecke:		?	10
Gesamtstrecke:		22,5	

In der Waagerechten gilt die Multiplikation $s = vt$, und in der ersten und dritten Spalte addieren sich die ersten beiden Einträge zum dritten. Die *Durchschnittsgeschwindigkeit* 22,5 km/h findet ihren natürlichen Platz zwischen Gesamtzeit und Gesamtstrecke, da sie einfach das Verhältnis dieser beiden Grössen ist. Ein häufiger Schülerfehler ist, die Geschwindigkeiten zu addieren, hier kann er thematisiert werden. Die Additivität in den äusseren Spalten kann z. B. durch Summenstriche hervorgehoben werden.

Nun kann die Tabelle in mehreren Schritten vervollständigt werden:

	Zeit (h)	Geschwindigkeit (km/h)	Strecke (km)
erste Strecke:	0,25	24	$6^{(1)}$
zweite Strecke:	$0{,}46\overline{1}^{(4)}$	$\simeq$ **21,67**$^{(5)}$	10
Gesamtstrecke:	$0{,}7\overline{1}^{(3)}$	22,5	$16^{(2)}$

Dem gegenüber zu stellen ist die Lösung in ausgeschriebenen arithmetischen Schritten, deren Reihenfolge vielen Schülern als “wie vom Himmel gefallen” erscheint. In der Tat entscheidet sich jede nächste arithmetische Operation anhand der zu diesem Zeitpunkt schon bekannten Grössen, deren Anzahl von 4 auf 9 anwächst. Da kann selbst eine Lehrperson schnell den Überblick verlieren. In der Tabelle haben alle Grössen ihren Platz und jederzeit ist ersichtlich, welche Grösse als nächste berechnet werden kann: Multiplikation/Division in den Zeilen, Addition/Subtraktion in den äusseren Spalten.

4.2 Beispielaufgabe: Klärwerk

> *Die Zuleitung eines Klärwerks kann das Klärbecken (2000 Kubikmeter Volumen) in 50 min ganz füllen. Es wird eine zweite Zuleitung gebaut, die doppelt so viel Abwasser pro Minute führt. Wie schnell füllen beide Zuleitungen zusammen das Klärbecken?*

Als Tabelle kann die Situation so dargestellt werden:

	Zeit (min)	Debit (m^3/min)	Volumen (m^3)
erste Leitung:	50		2000
		$\downarrow \cdot 2$	
zweite Leitung:			2000
beide Leitungen zusammen:	?		2000

Auch hier gilt in der Waagerechten Multiplikativität, und in der Senkrechten Additivität, diesmal in der zweiten Spalte. Der häufige Schülerfehler, die Zeiten zu addieren, folgt der bei Aufgabe 1 erlangten Anschauung und sollte thematisiert werden. Der wesentliche Unterschied, nämlich was hier die additive Grösse ist, springt in der Tabellendarstellung besonders gut ins Auge.

Zu beachten ist das dreimalige Vorkommen der Zahl 2000 in der dritten Spalte. Das liegt daran, dass ein und derselbse Vorgang (Füllen des Beckens) auf drei verschiedene Arten bewerkstelligt wird (mit Leitung 1, Leitung 2 oder beiden zusammen). Auch wurde eine Information aus dem Text als Pfeil zwischen Tabellenzellen dargestellt.

Vervollständigen der Tabelle:

	Zeit (min)	Debit (m^3/min)	Volumen (m^3)
erste Leitung:	50	$40^{(1)}$	2000
		$\downarrow \cdot 2$	
zweite Leitung:		$80^{(2)}$	2000
beide Leitungen zusammen:	$\mathbf{16{,}\overline{6}\,min}^{(4)}$	$120^{(3)}$	2000

5 Ausgearbeitete Unterrichtseinheit

Die Tabellendarstellung wird behutsam eingeführt, zunächst an erfahrungsgemäss anschaulichen Kontexten wir Preisen und Gewichten und auch nur mit einer additiven Spalte. Einige der ersten Aufgaben sind für die meisten Schüler der Sekundarstufe I sicher trivial, d. h. sie können die nötigen arithmetischen Schritte auch ohne die Tabelle finden und durchführen. Daher ist es ratsam, bei der Durchführung der Einheit mit der ersten "nicht trivialen" Aufgabe einzusteigen, d. h. derjenigen, bei der es anfängt unübersichtlich zu werden (z. B. Aufgabe 3 für eine 1. Sek, Aufgabe 6 für eine 3. Sek A). Mit den übersprungenen Aufgaben können leistungsschwache Schülern beauftragt werden.

Mit fortschreitender Komplexität werden auch unvertrautere Kontexte eingeführt. Die Entsprechung zu den Grössen der einfacheren Kontexte sticht in der Tabellendarstellung besonders ins Auge und damit den Transferprozess unterstützen.

5.1 Tabellen mit einer additiven Spalte

Zunächst sollen die Rechenregeln für 3×3-Tabellen vorgestellt und geübt werden:

1. *Du hast von deiner Tante eine Fünfziger-Note zum Geburtstag geschenkt bekommen und lädst drei Kollegen ins Kino ein. Die Karten kosten 9,50 CHF pro Person. Du überlegst, noch ein Getränk für jeden zu kaufen. Wie viel dürfen die Getränke pro Flasche höchstens kosten, damit dein Geld reicht?*

	Anzahl	Stückpreis (CHF)	Preis (CHF)
Kinokarten:	4	9,50	
Getränke:	4	?	
		Gesamtpreis:	50

Diese Aufgabe können die Schüler zunächst selbst lösen. Ihre Lösung wird von einem Schüler an der Tafel vorgestellt. im Anschluss präsentiert der Lehrer die Tabelle und zeigt das Lösungsverfahren daran. Die Zwischenergebnisse der Schüler erscheinen in der Tabelle. Am Ende sind alle Grössen an der Tafel, einerseits im Lösungsweg des Schülers, andererseits in der Tabelle. In der Tabelle ist ihre jeweilige Rolle jedoch farblich festgehalten (gegeben, gesucht, Zwischenergebnis).

Die nächsten beiden Aufgaben sind zum Selberlösen, die Besprechung fällt kürzer aus. Die erste Aufgabe behält den Kontext, variiert aber die gegebenen Grössen. Die zweite Aufgabe variiert den Kontext, hier findet Transfer statt. Der Tabellenkopf ist aber noch gegeben.

2. *Du hast wieder 50 CHF geschenkt bekommen und lädst davon wieder Kollegen ins Kino ein. Die Karten kosten diesmal 13,50 CHF, deshalb kannst du nur zwei Kollegen einladen. Vom Restgeld kaufst du noch ein paar Chips (70g-Tüte zum Preis von 1,90 CHF). Wie viele Chipstüten kannst du noch kaufen?*

   Bediene dich beim Lösen dieser Tabelle:

	Anzahl	Stückpreis (CHF)	Preis (CHF)
Karten:	3	13,50	
Chipstüten:	?	1,90	
		Gesamtpreis:	50

   Variante: *Was ändert sich in der Tabelle, wenn die Chips statt 1,90 CHF neu 2,50 CHF kosten? Wie ist das zu interpretieren?*

   Diese Variante schärft den Blick für die Fortpflanzung von Änderungen, was bei der Fehlersuche hilfreich ist. Sie geht auf die Tatsache ein, dass viele Textaufgaben unrealistisch genau aufgehen und sensibilisiert für die Feinheiten der Interpretation von Rechenergebnissen (auf- oder abrunden?).

3. *Bei einem Umzug sind 1300 kg zu transportieren. Zur Verfügung steht aber nur ein kleines Auto, das mit maximal 200 kg belastbar ist. Deshalb soll zusätzlich ein Transporter gemietet werden. Wieviel Ladegewicht muss der Transporter haben, damit der Umzug in zwei Runden pro Auto zu schaffen ist?*

   Bediene dich beim Lösen dieser Tabelle:

	Anzahl Fahrten	Ladung pro Fahrt (kg)	transportierte Ladung (kg)
Auto:			
Transporter:			
		Gesamtladung:	

4. *Der grösste verfügbare Transporter kann doch nur mit max. 500 kg beladen werden. Ausserdem kann mit dem kleinen Auto doch nur eine Runde gefahren werden, da es einem Kollegen gehört und er es danach braucht. Wie viele Runden müssen daher mit dem Transporter gefahren werden?*

   Noch eine Selbsterklärungsaufgabe.

5. *Überlege dir eine Geschichte zu dieser Tabelle:*

	Anzahl	Stückpreis (CHF)	Preis (CHF)
Produkt 1:	?	18	
Produkt 2:	4	13	
		Gesamtpreis:	150

   Erzähle die Geschichte zu Ende.

5.2 Tabellen mit zwei additiven Spalten

Zunächst eine Aufgabe im vertrauten Kontext. Sie wird ohne vorherige Eigenarbeit im Plenum gelöst.

6. *Eine Gruppe von 55 Personen unternimmt eine Bahnfahrt. Das Billet für eine Person kostet 84 CHF, mit Halbtax nur die Hälfte. Wenn 15 Personen in der Gruppe ein Halbtax haben, wieviel kostet die Fahrt für alle zusammen?*

	Anzahl Personen	Einzelpreis (CHF/Person)	Preis (CHF)
mit Halbtax:	15	$\uparrow :2$	
ohne Halbtax:		84	
gesamt:	55		?

Nun wird Additivität in der ersten Spalte eingeführt. Die Textzeile in der untersten Zeile ist nach links gewandert, um Platz für eine neue Zelle zu machen (Gesamtzahl Personen). Die Additivität kann durch Summenstriche hervorgehoben werden. Es ist ratsam, diese (zunächst) nicht zu einem einzigen langen Strich zusammenzuführen, da in der mittleren Spalte nicht addiert wird.

Die meisten Schüler werden in die Zelle “Einzelpreis mit Halbtax” gleich 42 schreiben. In der Musterlösung bietet sich aber die Einführung der Pfeilnotation als Vorbereitung auf komplexere Aufgaben an.

Die nächste Aufgabe übt in einem leicht geänderten Kontext, die nächste in einem gänzlich anderen. Dafür ist wieder der Tabellenkopf als Hilfestellung gegeben.

7. *Du planst eine 10tägige Urlaubsreise (9 Übernachtungen). Drei Nächte möchtest du in Ort A verbringen, den Rest in Ort B. In Ort B kostet die Übernachtung in der Herberge 44 CHF pro Nacht, für Ort A hst du noch keine Logis herausgesucht. Wenn dein Budget für die Reise 950 CHF beträgt (davon 500 CHF für die Bahnreise und Taschengeld), wieviel darf die Herberge in Ort A pro Nacht höchstens kosten?*

8. *Eine Radfahrerin benötigt für den ersten Teil einer Strecke 15 min, wenn sie mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h fährt. Berechne, wie schnell sie die zweite Teilstrecke von 10 km Länge zurücklegen muss, damit ihre Durchschnittsgeschwindigkeit für die ganze Strecke 22,5 km/h beträgt.*

	Zeit (h)	Geschwindigkeit (km/h)	Strecke (km)
erste Strecke:			
zweite Strecke:			
Gesamtstrecke:			

Eine Aufgabe mit einfacherem Kontext zum Anregen der Metakognition.

9. *"Ein Handwerker geht in einen Baumarkt, um Ziegel und Sand zu kaufen. Von den Ziegeln benötigt er 50 kg, vom billigen Sand bedeutend mehr, wie viel genau kann er noch nicht abschätzen. Deshalb beschliesst er, so viel Sand mitzunehmen, wie er neben den Ziegeln von den 200 CHF, die er bei sich hat, kaufen kann. Wie viel kg Sand sind das, wenn die Ziegel 3,50 CHF pro kg kosten und der Sand 20 Rappen pro kg?"*

   Zum Lösen dieser Aufgabe hat jemand angefangen, diese Tabelle zu erstellen:

	Ziegel	Sand
Kilopreis (CHF):	6	0,20
Kilogramm:	50	?

   Plötzlich zögert er. Was hat er "falsch" gemacht? Wie könnte er die Aufgabe mit dieser Tabelle fertig lösen, ohne von Neuem beginnen zu müssen?

5.3 Tabellen mit gewichtetem Mittelwert

Nun können Mischungsprobleme behandelt werden. An einem intuitiv gewählten Beispiel wird die Bedeutung der letzten Zelle (3. Zeile, 2. Spalte) erarbeitet. Zwar gilt Multiplikativität in der 3. Zeile, aber keine Additivität in der mittleren Spalte. Dieses Caveat sollte an mehreren Kontexten studiert werden.

Die nächste Aufgabe ist der Einstieg. Sie wird im Plenum gelöst. Beachte den erneuten Einsatz der Pfeilnotation.

10. *Karl findet Coca Cola (Zuckergehalt 106 g/l) zu süss, deshalb mischt er immer etwas Orangensaft (Zuckergehalt 70 g/l). So mischt er 50 ml Orangensaft in die dreifache Menge Coca Cola. Wie hoch ist der Zuckergehalt (in g/l) der Mischung?*

	Menge (l)	Zuckergehalt (g/l)	Zuckermenge (g)
Coca Cola:		106	
	$\uparrow \cdot 3$		
Orangensaft:	0,05	70	
Mischung:			

Eine sich zwanglos daraus ergebende Variante ist folgende:

11. *Karl hat Coke Zero für sich entdeckt. Schmeckt wie normale Cola, enthält aber keinen Zucker. Wieviel ml Coke Zero muss er zu 200 ml Coca Cola mischen, damit der Zuckergehalt der Mischung 50 g/l ist?*

    Da Coke Zero überhaupt keinen Zucker enthält, ist die Aufgabe auch ohne Unbekannte lösbar. Bevor wir zu Tabellen mit Gleichheitsbeziehungen und zum Rechnen mit Unbekannten übergehen, wird der gewichtete Mittelwert in einigen weiteren Kontexten geübt.

12. (aus [8]) *Im Kaffeegeschäft werden 15 kg der Sorte A zu 24,20 CHF/kg mit 10,5 CHF der Sorte B zu 20,80 CHF/kg gemischt. Wie viel kostet 1 kg dieser Mischung?*

13. (aus [8]) *Ein Confiseur mischt 4 kg Pralinés zu 66,55 CHF/kg mit 3,5 kg zu 94,60 CHF/kg und 5 kg zu 86,80 CHF/kg. Wie teuer müssen 100 g dieser Mischung verkauft werden?*

    Insbesondere bei Geschwindigkeitsaufgaben werden Strecke und Geschwindigkeit gerne verwechselt, und letztere dadurch fälschlicherweise addiert. Diese Selbsterklärungsaufgabe dient dem Überwinden dieses Fehlkonzepts.

14. *Lies die folgende Aufgabe.*

    > Ein Marathonläufer ist während der ersten 125 min des Rennens mit durchschnittlich 18,5 km/h gelaufen. Beim Endspurt legt er einen Zahn zu, so dass er nach weiteren 9 min 8 s ins Ziel läuft. Damit ist er seine beste Durchschnittsgeschwindigkeit von 18,87 km/h gelaufen. Wie schnell war er beim Endspurt und wie lang ist die Marathonstrecke?

Esther hat die Aufgabe so gelöst: "Zuerst rechne ich die Zeiten in Stunden um: 125 *min=* $\frac{125}{60}$ *h=* $2,08\overline{3}$ *h und* 9 *min* 8 *s=* $\frac{9}{60}$ *h+* $\frac{8}{3600}$ *h=* $\frac{548}{3600}$ *h=* $0,15\overline{2}$ *h. Dann erstelle ich die Tabelle:*

	Zeit (h)	Geschwindigkeit (km/h)	Strecke (km)
erste Etappe:	$2,08\overline{3}$	$18,5$	
Endspurt:	$0,15\overline{2}$	?	
gesamtes Rennen:		$18,87$	?

und vervollständige:

	Zeit (h)	Geschwindigkeit (km/h)	Strecke (km)
erste Etappe:	$2,08\overline{3}$	$18,5$	$38,541\overline{6}$
Endspurt:	$0,15\overline{2}$	$0,37$	$0,0563\overline{2}$
gesamtes Rennen:		$18,87$	$38,5979\overline{8} \simeq 38,6$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit beim Endspurt beträgt $0,0563\overline{2}$ *km/h, und der Läufer ist insgesamt* $38,6$ *km gelaufen."*

Kann das stimmen? Wie würdest du Esther die Aufgabe erklären?

15. (aus [8]) *50 g konzentrierter Salzsäurelösung (90 % Konzentration) werden mit 200 g einer verdünnten Lösung (15 % Konzentration) gemischt. Weil die Konzentration immer noch zu hoch ist, wird diese Mischung mit Wasser verdünnt. Wie viel Wasser ist beizumischen, um eine Konzentration von 5 % zu erreichen?*

5.4 Tabellen mit Gleichheitsbeziehungen

Die folgende Aufgabe wird im Plenum eingeführt. Das Eintragen der gegebenen Grössen wird zusammen getan (hier geschieht etwas Neues), das Vervollständigen der Tabelle können die Schüler dann selbst tun.

16. *Die Zuleitung eines Klärwerks kann das Klärbecken (2000 Kubikmeter Volumen) in 50 min ganz füllen. Es wird eine zweite Zuleitung gebaut, die doppelt so viel Abwasser pro Minute führt. Wie schnell füllen beide Zuleitungen zusammen das Klärbecken?*

	Zeit (min)	Debit (m^3/min)	Volumen (m^3)
erste Leitung:	50	$\downarrow \cdot 2$	2000
zweite Leitung:			2000
beide Leitungen zusammen:	?		2000

Diese Aufgabe ist in zwei Punkten wesentlich verschieden von den bisherigen: diesmal ist die Flussgrösse (Debit) additiv (2. Spalte) und in der 3. Spalte gilt nicht Additivität, sondern Gleichheit. Das liegt daran, dass ein und derselbse Vorgang (Füllen des Beckens) auf drei verschiedene Arten bewerkstelligt wird (mit Leitung 1, Leitung 2 oder beiden zusammen).

Beachte auch die erneute Verwendung der Pfeilnotation. Sie ist hier unentbehrlich, da der Pfeil zwischen zwei anfangs unbestimmten Zellen liegt, und bereitet auf das Vervollständigen mit Unbekannten vor.

Die nächste Aufgabe ist zum Selbstlösen.

17. *Ein Fussballstadion wird um einen neuen Ausgang erweitert. Mit dem alten Ausgang dauerte es durchschnittlich 44 Minuten, bis sich das vollbesetzte Stadion (22 000 Fussballfans) geleert hatte. Der neue, breitere Ausgang kann das Stadion allein in der Hälfte der Zeit leeren. Wie lange dauert die Evakuierung, wenn beide Ausgänge geöffnet sind?*

    Die folgende Aufgabe ist ähnlich, jedoch scheint hier eine wesentliche Angabe bzw. Einheit zu fehlen.

18. *Anna schafft einen Arbeitsauftrag in 5 h, Berta denselben in 3 h. Wie lange benötigen sie, wenn sie zusammen arbeiten?*

	Zeit (h)	Arbeitsgeschw. (Einheit?)	Arbeitsmenge (Einheit?)
Anna:	5		
Berta:	3		
beide zusammen:	?		

Im Vergleich zu den letzten beiden Aufgaben fehlt hier eine scheinbar wesentliche Angabe: was für eine Arbeit, insbes. welche Arbeitsmenge, wird verrichtet? Wie sich herausstellt, ist dies für das Endergebnis irrelevant und man kann die Arbeitsmenge einfach mit 1 (oder anschaulicher 100%) beziffern. Die Aufgabe besitzt also eine Skalensymmetrie.

Die nächste Aufgabe führt die Bedeutung negativer Flussgrössen ein.

19. *Ein Schwimmbecken kann in 45 min ganz gefüllt werden und in 50 min ganz geleert werden. Wie lange dauert das Füllen, wenn vergessen wird, den Abfluss zu schliessen?*

    Dieser Aufgabe fehlt auch wieder die Angabe des Volumens. Sie löst sich genau wie Aufgabe 2 inkl. der Moral aus Aufgabe 3, mit dem einen Unterschied, dass sich die Füllgeschwindigkeiten subtrahieren (bzw. Addition einer positiven und einer negativen Füllgeschwindigkeit).

5.5 Tabellen mit Unbekannten

5.5.1 Gleichung über Gleichheitsbeziehung

Nun kommt ein grosser konzeptueller Schritt. Die Schüler werden mit einer mit der Tabellenmethode scheinbar unlösbaren Aufgabe konfrontiert.

20. *Eine Treppe hat 40 Stufen. Würde jede Stufe um 2,4 cm höher gebaut, könnten 5 Stufen eingespart werden. Wie hoch ist die Treppe?*

    Hier gibt es zwei additive Grössen: “Anzahl Stufen” und “Höhe der Treppe in cm”. Die Rolle der Flussgrösse nimmt hier die Stufenhöhe (Einheit: cm/Stufe) ein. Des Weiteren werden die zwei Möglichkeiten nicht addiert, sondern nur verglichen. In Vorbereitung darauf wird die Angabe, dass beide Treppenvarianten gleich hoch sind, in der dritten Spalte notiert.

	Anzahl Stufen	Stufenhöhe (cm/Stufe)	Treppenhöhe (cm)
kleine Stufen:	40		?
	$-5 \downarrow$	$+2{,}4 \downarrow$	$= \updownarrow$
grosse Stufen:	35		?

Hier stossen wir auf eine Schwierigkeit: wir scheinen zu wenig Angaben zu haben, um weiterrechnen zu können. Das Problem ist, dass sich uns vier leere Felder in einem "Karree" präsentieren. Hier kann man nicht umhin, eine Unbekannte einzuführen. Die Tabellenmethode führt dann zum Aufstellen einer Gleichung, wobei drei Aufgabentypen zu unterscheiden sind. Dies ist der erste Typ. Wir wählen die Unbekannte "x: Höhe einer kleinen Stufe in cm".

	Anzahl Stufen	Stufenhöhe (cm/Stufe)	Treppenhöhe (cm)
kleine Stufen:	40	x	?
	$-5 \downarrow$	$+2{,}4 \downarrow$	$= \updownarrow$
grosse Stufen:	35		?

Und vervollständigen:

	Anzahl Stufen	Stufenhöhe (cm/Stufe)	Treppenhöhe (cm)
kleine Stufen:	40	x	$40x$
	$-5 \downarrow$	$+2{,}4 \downarrow$	$= \updownarrow$
grosse Stufen:	35		?

	Anzahl Stufen	Stufenhöhe (cm/Stufe)	Treppenhöhe (cm)
kleine Stufen:	40	x	$40x$
	$-5 \downarrow$	$+2{,}4 \downarrow$	$= \updownarrow$
grosse Stufen:	35	$x + 2{,}4$	?

	Anzahl Stufen	Stufenhöhe (cm/Stufe)	Treppenhöhe (cm)
kleine Stufen:	40	x	$40x$
	$-5 \downarrow$	$+2{,}4 \downarrow$	$= \updownarrow$
grosse Stufen:	35	$x + 2{,}4$	$35(x + 2{,}4)$

Die Gleichung steht schon vollständig in der Tabelle. Hier sticht auch der Vorteil der Pfeilnotation ins Auge. Die Schüler sollten in der Lage sein, hier an ihr Vorwissen anzuknüpfen und die Gleichung mittels algebraischer Umformungen zu lösen.

Zwei Aufgaben zum Selbstlösen.

21. *Schon mit einem Glas Orangensaft (250 ml) ist der Tagesbedarf an Vitamin C eines gesunden Erwachsenen gedeckt. Grapefruitsaft enthält 44 mg/l weniger Vitamin C, wer damit seinen Tagesbedarf decken will, sollte sich ein etwas grösseres Glas (280 ml) einschenken. Wie viel Vitamin C braucht denn nun der Mensch am Tag?*

22. *Herr H. spart für eine grosse Ferienreise. Er denkt sich: "Im Moment kann ich jeden Monat 350 CHF beiseite legen. Wenn ich aber bei meinem Chef eine Gehaltserhöhung von 240 CHF durchboxe, kann ich 4 Monate früher auf Reisen gehen." In wieviel Monaten wäre das, und was kostet die Reise?*

5.5.2 Gleichung über Additionsbeziehung

Diese Aufgabe dient dem Einführen einer weiteren Art, eine Gleichung aus einer Tabelle aufzustellen. Die meisten Schüler sollten keine Schwierigkeiten haben, von selbst darauf zu kommen, da sie mittlerweile genug Reflexe zum Vervollständigen (auch mit Unbekannten) haben sollten, um sich durch das Fehlen einer Gleichheitsbeziehung nicht aufhalten zu lassen.

23. *Ein Vermögen von 920 000 CHF wird in zwei Teilen angelegt: der erste zu 1,25% Zinsen, der zweite zu 2,75%. Nach einem Jahr ist das Vermögen auf 940 200 CHF angewachsen. Wie wurde das Vermögen aufgeteilt?*

	Betrag (CHF)	Zinssatz (%)	Profit (CHF)
Anteil 1:	?	1,25	
Anteil 2:	?	2,75	
gesamt:	920 000		20 200

Hier wurde der Gesamtprofit von 20 200 CHF schon im Voraus berechnet. Gerechnet wird wieder mit Dreisatz in den Zeilen und Addition/Subtraktion in der ersten und dritten Spalte (typischer Schülerfehler: Additivität der Zinssätze). Wieder erscheint ein Karree aus leeren Feldern. Wir wählen die Unbekannte "x: Anteil 1 in CHF".

	Betrag (CHF)	Zinssatz (%)	Profit (CHF)
Anteil 1:	x	1,25	
Anteil 2:	?	2,75	
gesamt:	920 000		20 200

Und vervollständigen:

	Betrag (CHF)	Zinssatz (%)	Profit (CHF)
Anteil 1:	x	1,25	$0{,}0125x$
Anteil 2:	?	2,75	
gesamt:	920 000		20 200

	Betrag (CHF)	Zinssatz (%)	Profit (CHF)
Anteil 1:	x	1,25	$0{,}0125x$
Anteil 2:	$920\,000 - x$	2,75	
gesamt:	$920\,000$		$20\,200$

	Betrag (CHF)	Zinssatz (%)	Profit (CHF)
Anteil 1:	x	1,25	$0{,}0125x$
Anteil 2:	$920\,000 - x$	2,75	$0{,}0275(920\,000 - x)$
gesamt:	$920\,000$		$20\,200$

Die Gleichung ergibt sich aus den Termen in der dritten Spalte:

$$0{,}0125x + 0{,}0275(920\,000 - x) = 20\,200.$$

Dies ist die zweite Art, eine Gleichung aufzustellen: zwei von der Unbekannten abhängige Einträge addieren sich zu einer bekannten Grösse. Interessanterweise lässt sich die Aufgabe auch ohne Unbekannte lösen, sobald man sieht, dass der Investitionsplan "Anteil 1 zu 1,25 % und Anteil 2 zu 2,75 %" identisch ist zum Plan "Die gesamten 920 000 CHF zu 1,25 % sowie Anteil 2 zu zusätzlichen 1,5 %."[3] Der zweite Anteil ergibt sich dann zu $(20\,200 - 0{,}0125 \cdot 920\,000) : 0{,}015 = 580\,000$ CHF.

Zwei weitere Aufgaben zum Selbstlösen.

[3] Natürlich sollte nur in Gedanken ein und derselbe Anteil doppelt investiert werden.

24. *Der französische Schnellzug TGV fährt die 495 km lange Strecke Paris–London in drei Abschnitten:*

Streckenabschnitt	Zeit
Paris–Calais	80 min
Calais–Ashford (Eurotunnel)	24 min
Ashford–London	30 min

Dabei fährt er zwischen Paris und Calais 70 km/h schneller als auf dem Rest der Strecke. Wie viel beträgt diese Höchstgeschwindigkeit, und wie lang sind die drei Streckenabschnitte?

25. *Bei einem 25-Kilometer-Rennen sprintet ein unerfahrener Läufer allen voran, bis er nach 5 km aus der Puste kommt und nur noch halb so schnell laufen kann. Er hält dieses Tempo für den Rest des Rennens und läuft nach insgesamt 90 min ins Zeil ein. Wie schnell ist er anfangs gelaufen?*

    Hinweis: Diese Aufgabe liefert bei jeder Wahl der Unbekannten x keine lineare Gleichung in x, jedoch wird sie linear in $\frac{1}{x}$ sein und damit für die Schüler lösbar.

5.5.3 Gleichung über Doppelbestimmung

Wenn die Coke Zero in Aufgabe 11 nicht komplett zuckerlos wäre, hätten die Schüler die Aufgabe nicht mit den bis dahin zur Verfügung stehenden Mitteln lösen können. Wenn Karl sich wieder fragt, wie viel *Orangensaft* er beizumischen hat, um 50 g/l Zuckergehalt zu erhalten, kann die Aufgabe durch das Setzen einer Unbekannten gelöst werden:

26. *Karl mischt seine Cola wieder mit Orangensaft. Wie viel Orangensaft (Zuckergehalt 70 g/l) muss er zu 200 ml Cola (Zuckergehalt 106 g/l) mischen, damit der Zuckergehalt der Mischung 50 g/l ist?*

    Diese Aufgabe empfiehlt sich zum Lösen im Plenum, da das Aufstellen der Gleichung hier etwas speziell ist.

	Menge (l)	Zuckergehalt (g/l)	Zuckermenge (g)
Coca Cola:	0,2	106	
Orangensaft:		70	
Mischung:		50	

Setzen der Unbekannten "x: Menge des beigefügten Orangensafts in Liter" und vervollständigen liefert:

	Menge (l)	Zuckergehalt (g/l)	Zuckermenge (g)
Coca Cola:	0,2	106	21,2
Orangensaft:	x	70	$70x$
Mischung:	$x + 0{,}2$	50	

Die letzte Zelle (Gesamtzuckergehalt) ist auf zwei Arten aus x bestimmt: einerseits als $21{,}2 + 70x$ und anderseits als $50(x + 0{,}2)$. Dies ergibt die Gleichung der Aufgabe und illustriert die dritte Möglichkeit, eine Gleichung aufzustellen: eine leere Zelle auf zwei verschiedene Arten aus der Unbekannten zu ermitteln.

Eine Aufgabe zum Selbstlösen, in einem sehr ähnlichen Kontext. Zur Hilfestellung kann die Wahl der Unbekannten "x: Menge Amaretto in cl" vorgegeben werden.

27. *Ein Cocktail besteht aus 4 cl Wodka (40% Alkoholgehalt), 10 cl Orangensaft und einem Schuss Amaretto (28%ig). Wie gross muss der Schuss sein, damit der Gesamtalkoholgehalt 12% nicht übersteigt?*

28. *Was bestimmt, ob ein Körper im Wasser schwimmt oder sinkt? Es ist das Verhältnis seines Gewichts zu seinem Volumen, also seine durchschnittliche Dichte. Ist sie grösser als die von Wasser (1 kg/dm^3), so sinkt der Körper, ansonsten treibt ihn der Auftrieb nach oben. Der menschliche Körper hat eine durchschnittliche Dichte von 1,01 kg/dm^3, diese kann aber durch Einatmen kleiner als die von Wasser gemacht werden (Luftdichte: 1,2 g/dm^3). Wie viel Liter Luft muss eine 65 kg schwere Person einatmen, um nicht zu sinken?*

6 Schluss

Nach wie vor sollte die Tabelle nur eine Darstellungsform unter vielen sein, die der Schüler selbstständig einsetzen kann. Welche Darstellungsform zum Löseerfolg führt, hängt fast unvorhersehbar vom Schüler und der Aufgabe ab. Sicher ist die Tabellenmethode nicht der einzig wahre Weg, und sie kann auch zuerst Verwirrung stiften. In der Erfahrung des Autors, so weit er sie im Unterricht angewendet hat, können die meisten Schüler Subtypen von Tabellen auf enger gefasste Aufgabentypen erfolgreich anwenden. Es besteht aber nach wie vor ein “Klammern an Lösungsschemata”, ohne das vereinheitlichende Prinzip in Gänze zu erfassen.

Die grosse Hürde verlagert sich auf das Erstellen der Tabellenköpfe, in denen die semantische Ebene der Aufgabe konzentriert erscheint. Das Vorgehen bei diesem Schritt ist ähnlich schwer zu erklären wie dasjenige beim Lösen von Textaufgaben allgemein, da es auf Erfahrungswerte zurückgreift, die sich die Schüler immer noch in langwieriger Eigenarbeit aneignen müssen. Ein Geheimrezept ist die Tabellenmethode daher noch lange nicht.

Komplexere Probleme können mit ihr nicht mehr gelöst werden. Einige nichtlinear Gleichungen (der Form $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+c} = d$) können noch mit ihrer Hilfe aus Textaufgaben extrahiert werden, darüber hinaus stösst sie aber an ihre Grenzen. Sicher kann das Prinzip der Tabelle jedoch auf jeder Stufe der Schulmathematik (und Hochschulmathematik) genutzt werden.

7 Literatur

[1] G. Pólya: *Schule des Denkens – Vom Lösen mathematischer Probleme* (4. Auflage, orig.: *How To Solve It*), Francke Verlag, 1995

[2] Kirschner, P.A., Sweller, J., Clark, R.E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist*, 41(2), 75-86.

[3] Sweller, J., Clark, R. E., Kirschner, P. E. (2010). Notices of the American Mathematical Society, November 2010, p. 1303 *(www.ams.org/notices/201010/rtx101001303p.pdf)*

[4] Paas, F., Van Gog, T. (eds.) (2006). *Recent worked examples research: Managing cognitive load to foster learning and transfer* [special issue]. Learning and Instruction, 16(2).

[5] *blog.mrmeyer.com*

[6] D. Meyer: *Math class needs a makeover*, TED talk *(www.ted.com)*

[7] *pisa.educa.ch/de/mathematik*

[8] F. Brandt, R. Daguet, A. Pfammatter, A. Saner: *Allgemeines Rechnen für Beruf und Alltag* (13. Auflage), Sauerländer, 2011