Kongruenz

Inhaltsverzeichnis

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Eigenschaften von kongruenten Figuren wiederholt, das sind Figuren, die die gleiche **Form** und **Grösse** haben. Im Anschluss wird es um den Begriff der **Ähnlichkeit** zwischen Figuren gehen, d. h. wenn sie zwar die gleiche Form, aber nicht unbedingt die gleiche Grösse haben.

1 Kongruenzabbildungen

Definition 1.1. ***Kongruenzabbildungen*** *sind Abbildungen, die die Länge einer Strecke erhalten. Für das Bild $[A'B']$ einer beliebigen Strecke $[AB]$ gilt dann:*

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}, \text{ aber im Allgemeinen } A'B' \nparallel AB. \tag{1.1}$$

Durch das Bild einer einzigen Strecke ist das Bild jedes anderen Punkts P der Ebene bis auf zwei Möglichkeiten festgelegt:

Satz 1.1. *Gegeben seien vier Punkte A, B, A' und B' mit $\overline{A'B'} = \overline{AB}$. Dann gibt es genau zwei Kongruenzabbildungen, so dass A' das Bild von A und B' das Bild von B ist.*

Beweis. Wähle einen beliebigen Punkt P (Abb. 1.1). Wir zeigen, dass nur zwei Punkte für den Bildpunkt P' in Frage kommen. Die Länge $\overline{AP}$ muss bei der Abbildung gleich bleiben, also $\overline{A'P'} = \overline{AP}$. Das heisst, P' liegt irgendwo auf dem Kreis $k_1 = k(A', \overline{AP})$ mit Mittelpunkt A' und Radius $\overline{AP}$.

Genau so muss wegen $\overline{B'P'} = \overline{BP}$ der Punkt P' irgendwo auf dem Kreis $k_2 = k(B', \overline{BP})$ liegen. Also ist P' einer der beiden Kreisschnittpunkte $\{P_1', P_2'\} = k_1 \cap k_2$. (Die Kreise schneiden sich immer, nur im Fall dass P auf der Gerade AB ist, berühren sie sich nur in einem Punkt.) Die Punkte P_1' und P_2' sind die Bildpunkte von P unter den beiden möglichen Kongruenzabbildungen. $\square$

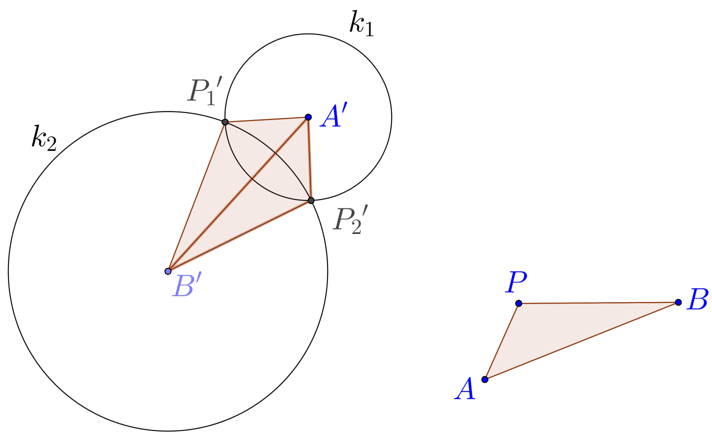


Abbildung 1.1: Zweideutigkeit einer Kongruenzabbildung

Das Dreieck ABP wird bei der Abbildung gedreht, verschoben, und je nach Wahl des Bildpunkts P' noch gespiegelt oder nicht. Die Klasse der Kongruenzabbildungen besteht aus:

- Drehungen
- Parallelverschiebungen
- Achsenspiegelungen sowie
- Kombinationen dieser drei.

Satz 1.2. *Eine Kongruenzabbildung ist durch die Bilder von drei Punkten eindeutig festgelegt. (Dabei muss klar sein, welcher Punkt auf welchen Bildpunkt abgebildet wird.)*

Ist die Zweideutigkeit der Kongruenzabbildung durch das Bild eines dritten Punkts aufgelöst, kann mit Kreisschneidungen das Bild jedes Punkts einer Figur konstruiert werden. Wegen des Kongruenzsatzes SSS werden so auch die Winkel von der Original- in die Bildfigur abgetragen. Kongruenzabbildungen erhalten also auch Winkel:

Satz 1.3. *Für das Bild unter einer Kongruenzabbildung eines beliebigen, durch drei Punkte definierten Winkels $\angle APB$ gilt: $\angle A'P'B' = \angle APB$.*

Beweis. Betrachte nochmals Abb. 1.1 und wähle $P' = P_1'$. Das Dreieck APB wird also auf $A'P'B' = A'P_1'B'$ abgebildet. Die Seiten dieser beiden Dreiecke sind paarweise gleich lang, da die Abbildung die Längen erhält. Nach dem Kongruenzsatz SSS sind also auch die Winkel paarweise gleich gross. $\square$

Hingegen ist die *absolute Orientierung* einer Strecke $[AB]$ (der Winkel bezüglich einer festen Horizontalen) im Allgemeinen nicht erhalten. Die Bildstrecke $[A'B']$ ist nur im Fall der Parallelverschiebungen parallel zum Original: $A'B' \parallel AB$. (Wohl aber sind die Bilder von parallelen Geraden wieder untereinander parallel.)

Wir halten nochmals fest: Bei Kongruenzabbildungen sind alle **Längen** und alle **Winkel** erhalten, d. h. die **Grösse** und **Form** einer Figur.

2 Kongruente Figuren

Definition 2.1. *Zwei Figuren $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ heissen* ***kongruent*** *oder auch* ***deckungsgleich*** *(Kurzschreibweise $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{F}_2$), wenn die eine das Bild unter einer Kongruenzabbildung der anderen ist. Dann sind die sich unter der Abbildung entsprechenden Winkel in beiden Figuren gleich gross* ***(gleiche Form)*** *und sich entsprechende Längen sind gleich lang* ***(gleiche Grösse)****.*

Andersherum kann sich auch die Frage stellen, wie viele Längen und/oder Winkel übereinstimmen müssen, damit zwei Figuren kongruent sind. Die Antwort darauf liefern die **Kongruenzsätze für Dreiecke**. Die Kongruenz anderer Figuren lässt sich durch eine Aufteilung in Dreiecke prüfen.

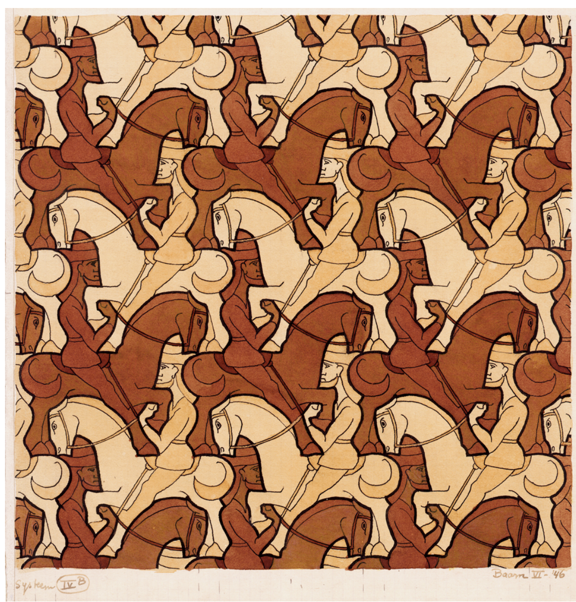
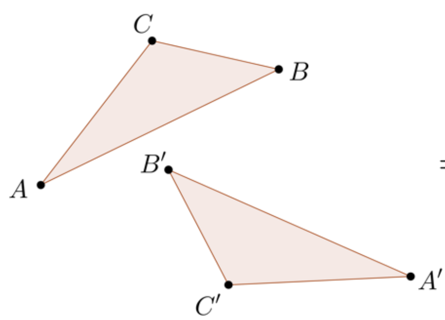
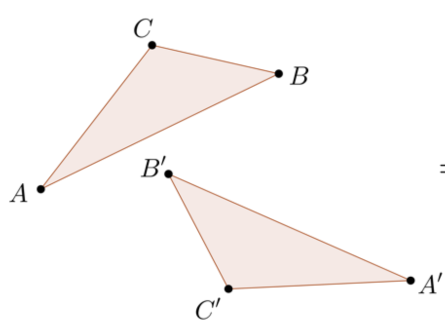


Abbildung 2.1: Maurits Cornelis Escher, *Reiter* (1946). Alle Reiter sind kongruent zueinander: Sie haben die gleiche Form und Grösse.

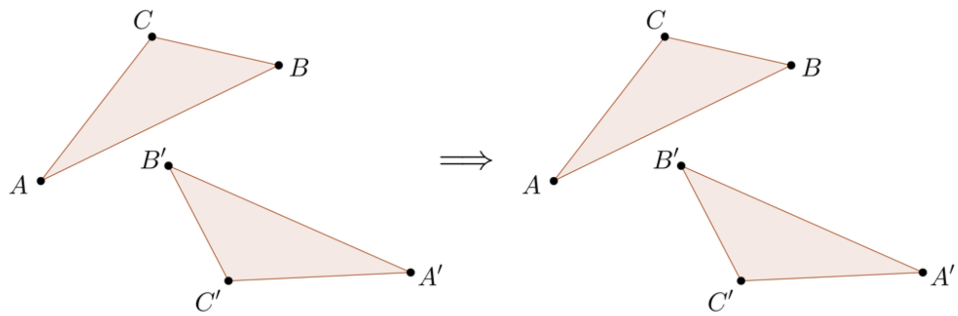
Satz 2.1 (**Kongruenzsatz *SSS***). *Sind in zwei Dreiecken* ABC *und* $A'B'C'$ *alle drei Seiten paarweise gleich lang:* $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, *dann sind die Dreiecke kongruent:* $ABC \cong A'B'C'$, *und ihre drei Winkel sind auch paarweise gleich gross:* $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$.



Satz 2.2 (**Kongruenzsatz *SWS***). *Sind in zwei Dreiecken* ABC *und* $A'B'C'$ *zwei Seiten paarweise gleich lang:* $a = a'$, $b = b'$, *und die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich gross:* $\gamma = \gamma'$, *dann sind die Dreiecke kongruent:* $ABC \cong A'B'C'$, *und die restlichen Grössen sind auch gleich:* $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $= c'$.



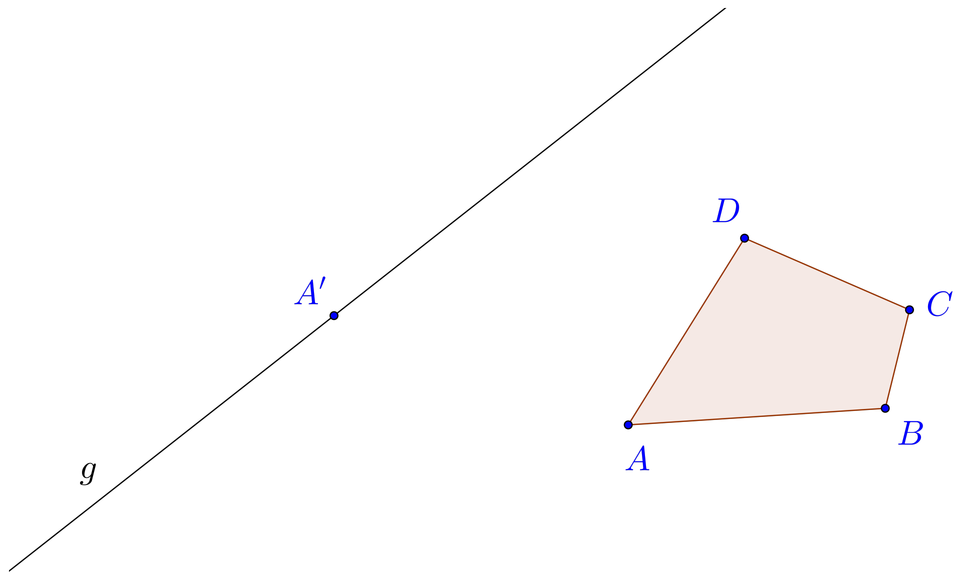
Satz 2.3 (**Kongruenzsatz *WSW***). *Sind in zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$ zwei Winkel paarweise gleich gross: $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, und die von ihnen eingeschlossenen Seiten gleich lang: $c = c'$, dann sind die Dreiecke kongruent: $ABC \cong A'B'C'$, und und die restlichen Grössen sind auch gleich: $a = a'$, $b = b'$, $\gamma = \gamma'$.*



Satz 2.4. *Kongruente Figuren haben den gleichen Flächeninhalt, d. h. wenn $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{F}_2$, dann ist $F(\mathcal{F}_1) = F(\mathcal{F}_2)$.*

Beweis. Intuitiv ist der Satz klar. Man kann ihn aber auch auf die Grundeigenschaften von Kongruenzabbildungen zurückführen. Dafür zeigt man ihn zunächst für Dreiecke (in der Flächenformel $\frac{ah_a}{2}$ bleiben beide Längen gleich) und überlegt dann, dass jede Figur in Dreiecke zerlegt werden kann. (Vielecke bestehen aus einer endlichen Anzahl von Dreiecken, Figuren mit Kurven wie z. B. Kreise können mit einer unendlichen Anzahl von Dreiecken ausgefüllt werden.) $\square$

Übung 2.1. *Das Viereck $ABCD$ wird mit einer Kongruenzabbildung so bewegt, dass die Bildseite $[A'B']$ auf der Geraden g zu liegen kommt (A' angegeben). Vervollständige mit Längenabtragungen (Zirkel!) alle vier möglichen Bildvierecke.*



Übung 2.2. *Betrachte zwei zueinander kongruente Dreiecke ABC und DEF. Wie viele Kongruenzabbildungen bilden ABC auf DEF ab, wenn die Dreiecke*

(a) *unregelmässig sind?*
(b) *gleichschenklig sind?*
(c) *gleichseitig sind?*

Übung 2.3. *Es gibt noch einen vierten bekannten Kongruenzsatz, genannt SsW. Recherchiere, was er besagt, und welche Bedingung dafür gelten muss. Warum ist diese Bedingung relevant? Was passiert, wenn sie nicht erfüllt ist?*

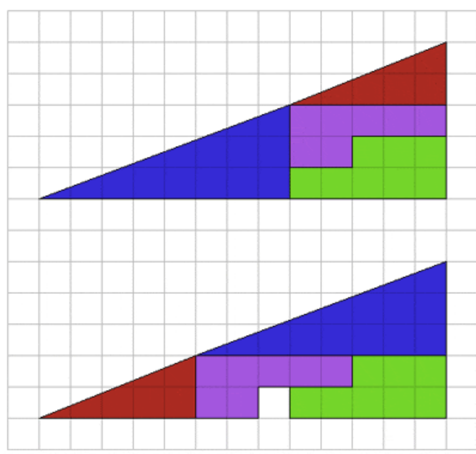
Übung 2.4. *Betrachte zwei beliebige, nicht unbedingt kongruente Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$. Ihre Seitenlängen seien mit $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, usw. bezeichnet, ihre Winkel mit $\alpha = \angle DAB$ usw.*

(a) *Die Seitenlängen seien paarweise gleich lang: $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ und $d = d'$. Sind die Vierecke dann zwangsläufig kongruent? Begründe.*

(b) *Nenne eine weitere Bedingung, die zu denen in (a) hinzukommen muss, damit die Vierecke kongruent sind.*

(c) *In welchen weiteren Kombinationen von Seiten und Winkeln müssen die Vierecke übereinstimmen, um kongruent zu sein? Nenne mindestens zwei. Achte auf die gegenseitige Lage der Seiten und Winkel!*

Übung 2.5. *Die beiden Figuren sind in kongruente Teile zerlegt, haben aber offenbar nicht den gleichen Flächeninhalt! Was ist hier los?*



3 Lösungen zu den Übungen

2.2 (a) eine; (b) zwei; (c) sechs