Algebra in den rationalen Zahlen

Inhaltsverzeichnis

Die Erweiterung der Zahlenmenge von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$ hat erlaubt, ohne Einschränkung subtrahieren können. Doch unter der Division ist $\mathbb{Z}$ noch nicht abgeschlossen, d. h. die Gleichung in x

$$x \cdot b = a \quad (a, b \text{ in } \mathbb{Z})$$

hat nicht immer eine *ganze* Zahl als Lösung. Dies tritt genau dann ein, wenn a kein Vielfaches von b ist. In der Menge der ganzen Zahlen kann dann nur mit einem Rest dividiert werden. Diese Einschränkung heben wir nun auf und erweitern damit auf die Menge der **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$.

Es gibt sehr viele Parallelen zu der Erweiterung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$. Vergleiche das Folgende also intensiv mit dem vorherigen Kapitel!

1 Der Kehrwert

Definition. *Der* ***Kehrwert*** $\frac{1}{a}$ *einer beliebigen Zahl* $a \neq 0$ *ist die Lösung der Gleichung*

$$a \cdot x = 1,$$

d. h. $\frac{1}{a}$ *ist diejenige Zahl, die mit a multipliziert 1 ergibt:*

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

Einzig die Zahl 0 hat keinen Kehrwert (die Gleichung $x \cdot 0 = 1$ hat keine Lösung).

Es folgt sofort:

Satz. *Der Kehrwert des Kehrwerts von a ist a selbst:*

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a.$$

Beweis. Zu lösen ist die Gleichung $\frac{1}{a} \cdot x = 1$. Wir wissen aber schon, dass $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, mit anderen Worten: a löst die Gleichung. □

Definition. *Die Kehrwerte der natürlichen Zahlen* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ *heissen* ***Stammbrüche****. Sie, zusammen mit ihren Vielfachen*

$$a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \quad (a \text{ in } \mathbb{Z}, b \text{ in } \mathbb{N}),$$

bilden die Menge der ***rationalen Zahlen (Brüche)*** $\mathbb{Q}$ *(Abb. 1.1). Im Bruch* $\frac{a}{b}$ *heisst a* ***Zähler*** *und b* ***Nenner****.*

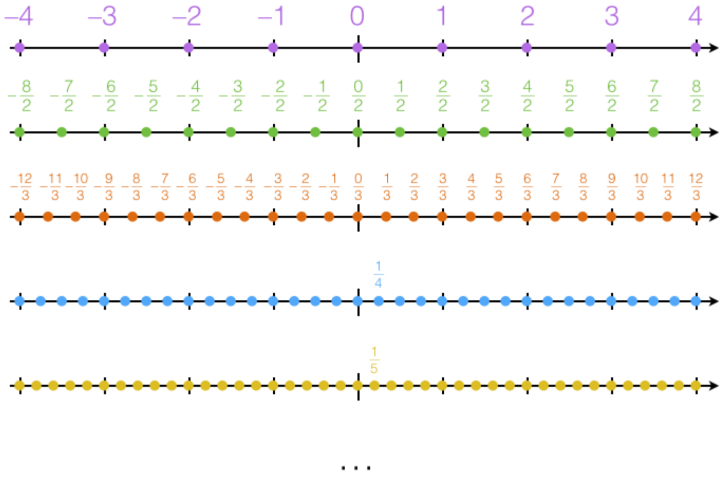


Abbildung 1.1: Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist aus den Stammbrüchen $\frac{1}{b}$ $(b \in \mathbb{N})$ und ihren Vielfachen $\frac{a}{b}$ $(a \in \mathbb{Z})$ aufgebaut.

Bevor wir die Grundrechenarten auf die rationalen Zahlen erweitern, gehen wir in den folgenden beiden Abschnitten auf die zwei zentralen Darstellungen der rationalen Zahlen ein: als Bruch und als Dezimalzahl.

2 Die Bruchdarstellung

Satz. *Für beliebige Zahlen a in $\mathbb{Z}$ und b in $\mathbb{N}$ gilt:*

$$a : b = \frac{a}{b}.$$

Beweis. Zur Erinnerung: der Quotient $a : b$ bezeichnet die Lösung der Gleichung $x \cdot b = a$. Es ist also zu zeigen, dass $\frac{a}{b}$, d. h. $a \cdot \frac{1}{b}$ die Gleichung $x \cdot b = a$ löst. Einsetzen ergibt $\frac{a}{b} \cdot b = a \cdot \frac{1}{b} \cdot b = a \cdot 1 = a$. □

Dieser Satz verknüpft die zwei geometrischen Anschauungen von $\frac{a}{b}$ auf dem Zahlenstrahl: einerseits a Kopien des Stammbruchs $\frac{1}{b}$, der selbst der b-te Teil der Einheitslänge 1 ist. Andererseits ist $\frac{a}{b} = a : b$ die geometrische Unterteilung (Division) der Länge a in b Teile.

Satz. *Für beliebige Zahlen a, b und c gilt:*

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

Das ist das Prinzip des Kürzens und Erweiterns von Brüchen.

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{ac}{bc} &= (ac) : (bc) \\ &= a \cdot c : b : c \\ &= a : b \cdot c : c \\ &= a : b \\ &= \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

□

Die Identität des letzten Satzes gilt *nicht nur für ganze Zahlen* a, b und c. Dies wird später z. B. beim Vereinfachen von Doppelbrüchen nützlich sein. Im Fall von natürlichen Zahlen a, b und c gibt es ein geometrisches Bild: Die Strecke $\frac{a}{b}$ kann in a Teile der Länge $\frac{1}{b}$ unterteilt werden, aber auch in ac Teile der Länge $\frac{1}{bc}$. Die Darstellung einer rationalen Zahl als Bruch ist also nicht eindeutig!

Definition. *Ein Bruch $\frac{a}{b}$ (a in $\mathbb{Z}$, b in $\mathbb{N}$) heisst* ***unkürzbar****, wenn a und b keine gemeinsamen Teiler ausser 1 haben. Jede rationale Zahl hat eine* ***eindeutige*** *Darstellung als unkürzbarer Bruch.*

Ein Bruch wird gekürzt, indem wir Zähler und Nenner in ihre **Primfaktoren** zerlegen und gemeinsame Primfaktoren herausstreichen. Die übrigen Faktoren können dann wieder zusammenmultipliziert werden.

Definition. *In der* ***Primfaktorzerlegung*** *eines Bruchs sind Zähler und Nenner in ihre Primfaktoren zerlegt, und gemeinsame Primfaktoren sind herausgekürzt. Die Primfaktorzerlegung eignet sich für das Kürzen nach einer Rechnung wie Multiplikation und Division (Abschnitt 4), sowie für das Gleichnamigmachen für Addition und Subtraktion (Abschnitt 5).*

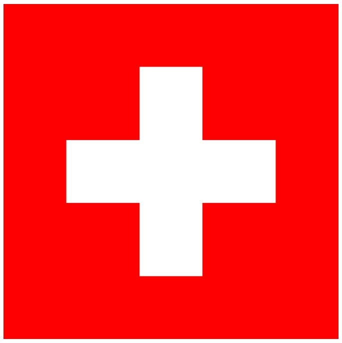
Beispiel 2.1.

$$\begin{aligned}
\frac{144\cdot 74\cdot 92}{69\cdot 108\cdot 222} &= \frac{(2^4\cdot 3^2)\cdot(2\cdot 37)\cdot(2^2\cdot 23)}{(3\cdot 23)\cdot(2^2\cdot 3^3)\cdot(2\cdot 3\cdot 37)}\\
&= \frac{2^7\cdot 3^2\cdot 23\cdot 37}{2^3\cdot 3^5\cdot 23\cdot 37}\\
&= \frac{2^4}{3^3} \quad \textit{(Primfaktorzerlegung)}\\
&= \frac{16}{27} \quad \textit{(unkürzbarer Bruch).}
\end{aligned}$$

Übung 2.1. *Kürze:*

- *(a)* $\frac{63}{91}$
- *(b)* $\frac{99}{51}$
- *(c)* $\frac{432}{576}$
- *(d)* $\frac{1818}{1919}$

Übung 2.2. *Dies ist eine Fortsetzung der Übung 2.4 im Kapitel "Algebra in den natürlichen Zahlen".*



Aus dem Beschluss der Bundesversammlung vom 12. Dezember 1889:

> *"Das Wappen der Eidgenossenschaft ist im roten Felde ein aufrechtes, frei stehendes weisses Kreuz, dessen unter sich gleiche Arme je einen Sechstel länger als breit sind."*

(a) Drücke die Länge b der Arme als Term in der Breite a aus.
(b) Drücke den Flächeninhalt des Schweizerkreuzes als Term in der Länge a allein aus. Vereinfache den Term so weit wie möglich.
(c) Berechne mit diesem Term Umfang und Flächeninhalt eines Schweizerkreuzes der Armbreite $a = 54$ cm und vergleiche das Ergebnis mit Teil (b) der früheren Übung.

3 Die Dezimaldarstellung

Definition. *Die* ***Dezimaldarstellung*** *einer rationalen Zahl* $\frac{a}{b}$ *erhält man, indem man die Division* $a : b$ *durchführt.*

Beispiel 3.1.

(a)

```
234 : 13 = 18
13
104
104
  0
```

(b)

```
77 : 500 = 0,154
 0
770
500
2700
2500
 2000
 2000
    0
```

(c)

```
398 : 165 = 2,41212... = 2,41̅2̅
330
 680
 660
  200
  165
   350
   330
    200
    165
     350
     330
      200
      ...
```

Satz. *Beim Umrechnen einer rationalen Zahl* $\frac{a}{b}$ *von der Bruchdarstellung in die Dezimaldarstellung, also beim Durchführen der Division* $a : b$*, entsteht entweder:*

- *eine ganze Zahl,*
- *eine abbrechende Dezimalzahl oder*
- *eine periodische Dezimalzahl.*

Beweis. Wenn a ein Vielfaches von b ist, so ist $a : b$ eine ganze Zahl (Beispiel 3.1 (a)). Wenn a kein Vielfaches von b ist, so wird die Division nach dem Komma weitergeführt. Dabei besteht jeder Schritt aus einer Division durch b mit Rest. Der Rest ist immer eine natürliche Zahl zwischen (einschliesslich) 0 und $b - 1$. Nun gibt es zwei Möglichkeiten, wie die Division weitergeht:

- Entweder der Rest ist irgendwann 0 (die Division durch b geht auf), dann sind wir fertig und haben eine abbrechende Dezimalzahl als Ergebnis (Beispiel 3.1 (b)).
- Oder wir erhalten irgendwann einen Rest, der schon einmal vorkam. Dann wiederholen sich die Schritte von hier ab im Kreis und die Dezimalstellen auch. Das Ergebnis ist also eine Dezimalzahl mit einer Periode (Beispiel 3.1 (c)).

□

Ganze Zahlen und abbrechende Dezimalzahlen können als Sonderfall von periodischen Dezimalzahlen aufgefasst werden:

$$24 = 24{,}\overline{0}$$

$$0{,}16 = 0{,}16\overline{0}$$

Genau wie die Bruchdarstellung ist die Dezimaldarstellung nicht eindeutig denn es gilt z. B.:

Satz.

$$0{,}\overline{9} = 1.$$

Beweis. Hier sind drei Beweisvarianten.

- $1 - 0{,}\overline{9} = 0{,}\overline{0}1$. Die Stelle mit der Ziffer 1 ist “unendlich weit rechts”, also kleiner als jede positive Zahl. Also ist die Differenz 0.
- $0{,}\overline{9} = 3 \cdot 0{,}\overline{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$.
- Setze $x = 0{,}\overline{9}$, dann ist $10x = 9{,}\overline{9}$ und daher $10x - 9 = 0{,}\overline{9} = x$. Die Lösung der Gleichung

  $$10x - 9 = x$$

  ist $x = 1$.

□

Daher ist also sogar

$$24 = 24{,}\overline{0} = 23{,}\overline{9}$$

$$0{,}16 = 0{,}16\overline{0} = 0{,}15\overline{9}$$

Auch die "echt" periodischen Dezimalzahlen haben keine eindeutige Darstellung, z. B. ist $0{,}\overline{17} = 0{,}\overline{1717} = 0{,}1\overline{71}$.

Satz. *Jede abbrechende oder periodische Dezimalzahl hat eine eindeutige Darstellung als unkürzbarer Bruch.*

Der Beweis, d. h. wie man von der Dezimaldarstellung wieder in die Bruchdarstellung umwandelt, wird in Abschnitt 6 gezeigt.

Übung 3.1. *Verwandle in die Dezimaldarstellung:*

- *(a)* $\frac{7}{8}$
- *(b)* $\frac{131}{125}$
- *(c)* $\frac{2}{37}$
- *(d)* $\frac{1000}{111}$
- *(e) (eine Herausforderung)* $\frac{443}{177}$