Algebra in den natürlichen Zahlen

© Ben Hambrecht

Inhaltsverzeichnis

1 Addition und Multiplikation

Definition. *Die Menge der **natürlichen Zahlen** ist*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

oder einschliesslich der Null

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Definition. *Die **Summe** aus zwei Zahlen (**Summanden**) a und b ist die Zahl*

$$a + b.$$

Satz. *Die Addition hat folgende Eigenschaften (Rechengesetze).*

- *(a)* ***assoziativ:*** *$a + (b + c) = (a + b) + c$, d. h. man kann einfach $a + b + c$ schreiben.*
- *(b)* ***kommutativ:*** *$a + b = b + a$, d. h. Summanden können beliebig umgestellt werden.*
- *(c) Null ist das* ***neutrale Element:*** *$a + 0 = 0 + a = a$.*

Definition. *Das **Produkt** aus zwei Zahlen (**Faktoren**) a und b ist die Zahl*

$$a \cdot b = ab.$$

Satz. *Die Multiplikation hat folgende Eigenschaften.*

- *(a)* ***assoziativ:*** *$a \cdot (bc) = (ab) \cdot c$, d. h. man kann einfach abc schreiben.*
- *(b)* ***kommutativ:*** *$ab = ba$, d. h. Faktoren können beliebig umgestellt werden.*
- *(c) Eins ist das* ***neutrale Element:*** *$1a = a \cdot 1 = a$.*
- *(d) Null ist das* ***absorbierende Element:*** *$0a = a \cdot 0 = 0$.*

Definition (Reihenfolge der Operatoren). *In Ausdrücken, die sowohl $+$ als auch $\cdot$ enthalten, ist die Reihenfolge der Operatoren durch die Regel "Punkt vor Strich" festgelegt:*

- *(a) Mit $a + b \cdot c$ ist $a + (b \cdot c)$ gemeint, nicht $(a + b) \cdot c$.*
- *(b) Mit $a \cdot b + c$ ist $(a \cdot b) + c$ gemeint, nicht $a \cdot (b + c)$.*

Übung 1.1. *Füge in den Term so viele Klammern wie möglich ein, ohne die Bedeutung zu verändern.*

$$a \cdot b + 5a \cdot c + ab \cdot c$$

Übung 1.2. *Lösche in dem Term so viele Klammern wie möglich, ohne die Bedeutung zu ändern.*

$$\{[(x \cdot y)z + 9] \cdot (x \cdot z) + 8x\}$$

Übung 1.3. *Beim Basketball gibt es drei verschiedene Arten von Treffern:*

- *Ein normaler Korb zählt 2 Punkte.*
- *Wurde ein Korb aus mehr als 6,75 m Entfernung erzielt, so zählt er 3 Punkte (so genannter Dreierkorb).*
- *Ein Freiwurfkorb (z. B. nach einem Foul) zählt 1 Punkt.*

(a) *Drücke die Gesamtpunktzahl einer Basketball-Mannschaft als Term in den Variablen*

- N*: Anzahl normale Körbe*
- D*: Anzahl Dreierkörbe*
- F*: Anzahl Freiwurfkörbe*

aus.

(b) *Welche Mannschaft hat das Spiel gewonnen?*

	LA Lakers	*Chicago Bulls*
N	*23*	*24*
D	*18*	*16*
F	*22*	*25*

2 Das Distributivgesetz

Satz (**Distributivgesetz zwischen** $+$ **und** $\cdot$)**.** *Für beliebige Zahlen a, b und c gilt:*

(a) $a(b+c) = ab + ac$ *("Klammern nach links auflösen")*
(b) $(a+b)c = ac + bc$ *("Klammern nach rechts auflösen")*

Beweis. Die Abb. 2.1 veranschaulicht die erste Identität für natürliche Zahlen a, b, c. Die zweite Identität ergibt sich aus der ersten und der Tatsache, dass die Multiplikation kommutativ ist. □

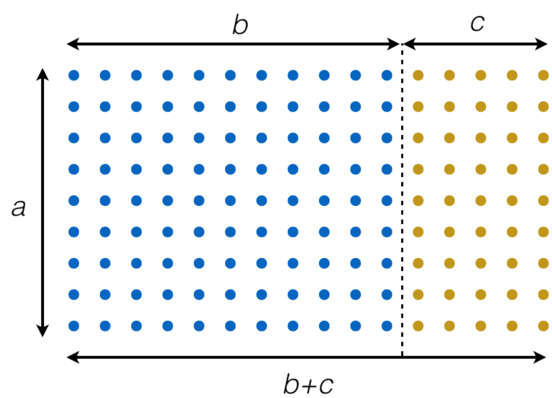


Abbildung 2.1: Illustration des Distributivgesetzes. Die Anzahl der Punkte ist Höhe mal Breite, also $a(b+c)$. Andererseits können zuerst die Punkte links, ab, und die Punkte rechts, ac, gezählt und addiert werden: $ab + ac$.

Beispiel 2.1. *Ausmultiplizieren:*

(a) $3(a+1) = 3a + 3 \cdot 1 = 3a + 3$
(b) $7(2b+3r) = 7 \cdot 2b + 7 \cdot 3r = 14b + 21r$
(c) $(2ac+d) \cdot 6t = 2ac \cdot 6t + d \cdot 6t = 12act + 6dt$
(d) $9x(y+2z)w = (9xy + 18xz)w = 9wxy + 18wxz$

Es ist üblich, in einem Ergebnis Produkte von Variablen alphabetisch zu sortieren, mit dem Zahlfaktor an erster Stelle.

Das Distributivgesetz wird auch zum Zusammenfassen (**Faktorisieren**) von Summen verwendet.

Beispiel 2.2. *Zusammenfassen:*

(a) $3a + 3b = 3(a + b)$
(b) $4x + 3x + x = (4 + 3 + 1)x = 8x$ *(denn* $x = 1x$*)*
(c) $ab + bc = ba + bc = b(a + c)$
(d) $12stu + 18rstw = 6st \cdot 2u + 6st \cdot 3rw = 6st(2u + 3rw)$

Beispiel 2.3. *In den folgenden Termumformungen werden die Schritte des Ausmultiplizierens und Zusammenfassens kombiniert:*

(a)

$$\begin{aligned} & 7(g + 3h) + 2(4g + h) \\ = \; & 7g + 21h + 8g + 2h \\ = \; & (7 + 8)g + (21 + 2)h \\ = \; & 15g + 23h \end{aligned}$$

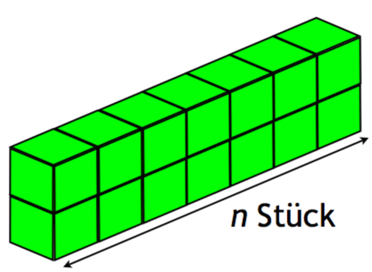
(b)

$$\begin{aligned} & 3a[3b + c(1 + b)] + 4(c + b)a + b[a + 2a(c + 4)] \\ = \; & 9ab + 3ac + 3abc + 4ac + 4ab + ab + 2abc + 8ab \\ = \; & 22ab + 7ac + 5abc \end{aligned}$$

Übung 2.1. *Multipliziere aus.*

(a) $7b(2ac + 5cd)$
(b) $5x \cdot 10(3 - 2y)$
(c) $2r(3g + 4t) \cdot 7x$

Übung 2.2. *Auf einem Tisch wird eine Reihe von übereinander gestapelten Würfelpaaren (Seitenlänge 1) gebildet. Die Länge der Reihe wird mit der Variablen* n *bezeichnet.*



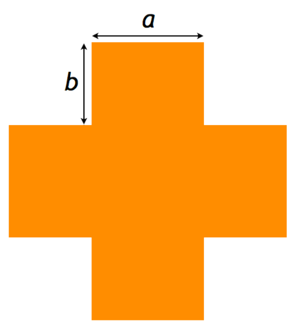
(a) *Wie viele Würfelseiten sind für* $n = 1, 2, 3, 5, 10$ *sichtbar? (Die auf den Tisch aufliegenden Seiten sind nicht sichtbar.)*

(b) *Drücke die Anzahl sichtbarer Würfelseiten als Term in n aus und vereinfache ihn so weit wie möglich.*
(c) *Wie viele Würfelseiten sind für $n = 1000$ sichtbar?*
(d) *Gleiche Fragen (a)–(c) für die Anzahl* ***verdeckter*** *Würfelseiten.*

Übung 2.3. *Fasse so weit wie möglich zusammen.*

(a) $5y + y + 6y + 0y$
(b) $6xy + 8yz$
(c) $36abd + 24bcd + 16bd$

Übung 2.4. *Betrachte dieses Kreuz:*



(a) *Drücke den Umfang des Kreuzes als Term in den Längen a und b aus.*
(b) *Drücke den Flächeninhalt des Kreuzes als Term in a und b aus. Faktorisiere den Term.*
(c) *Welchen Umfang und Flächeninhalt hat ein Kreuz mit den Abmassen $a = 54$ cm und $b = 63$ cm?*

Übung 2.5. *Vereinfache die Terme, indem du zuerst ausmultiplizierst und dann gleichartige Terme zusammenfasst.*

(a) $(4z + r) \cdot 5 + 6(2r + 5z + 5r)$
(b) $[p(m + 2n) + m(5n + p)]r + n[m(p + r) + 8pr - mp]$