# Algebra in den ganzen Zahlen

© Ben Hambrecht

## Inhaltsverzeichnis

## 1 Die Gegenzahl

Wir haben gesehen, dass die natürlichen Zahlen unter der Subtraktion nicht abgeschlossen sind, d. h. die Gleichung in $x$

$$x + b = a \quad (a, b \text{ in } \mathbb{N})$$

hat nicht immer eine *natürliche* Zahl als Lösung. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a < b$, wenn wir also eine grössere von einer kleineren Zahl subtrahieren. Das Bedürfnis, diese Einschränkung aufzuheben, führt zu den negativen Zahlen und der Menge der **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$.

**Definition.** *Die **Gegenzahl** $-a$ einer beliebigen Zahl $a$ ist die Lösung der Gleichung*

$$x + a = 0,$$

*d. h. $-a$ ist diejenige Zahl, die zu $a$ addiert 0 ergibt:*

$$a + (-a) = 0.$$

Es folgt sofort:

**Satz.** *Die Gegenzahl der Gegenzahl von $a$ ist $a$ selbst:*

$$-(-a) = a.$$

*Beweis.* Zu lösen ist die Gleichung $x + (-a) = 0$. Wir wissen aber schon, dass $a + (-a) = 0$, mit anderen Worten: $a$ löst die Gleichung. □

**Definition.** *Die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, …, zusammen mit ihren Gegenzahlen $-1$, $-2$, $-3$, … sowie der 0 bilden die Menge der **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$:*

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

**Definition.** *Der Wert einer Zahl $a$ ohne ihr Vorzeichen heisst der **Betrag** $|a|$ von $a$. Es ist also z. B.*

$$|-5| = 5, \quad |3| = 3, \quad |-1| = 1, \quad |0| = 0.$$

## 2 Addition und Subtraktion

**Definition.** *Die **Addition** ist in $\mathbb{Z}$ durch "Hüpfen auf dem Zahlenstrahl" erklärt. Um aus gegebenen ganzen Zahlen $a$ und $b$ die Summe $a + b$ zu bestimmen, platzieren wir uns in $a$ und hüpfen so:*

- *das Vorzeichen von $b$ gibt die Richtung an. $+$ bedeutet nach rechts, $-$ bedeutet nach links.*
- *der Betrag von $b$ gibt die Anzahl Schritte an.*

**Beispiel 2.1.** *Addition ganzer Zahlen:*

- $5 + (-8) = -3$ *(von 5 ausgehend 8 Schritte nach links)*
- $(-4) + 3 = -1$ *(von $-4$ ausgehend 3 Schritte nach rechts)*
- $(-2) + (-99) = -101$ *(von $-2$ ausgehend 99 Schritte nach links)*

Die grundlegenden Eigenschaften der Addition (assoziativ, kommutativ, 0 ist neutrales Element) gelten auch in dieser erweiterten Version des Addierens.

Mit der Addition ist auch die Subtraktion definiert: $a - b$ ist die Lösung der Gleichung $x + b = a$. Tatsächlich ist diese Gleichung in $\mathbb{Z}$ nun **immer lösbar**, und ihre Lösung ist:

**Satz.** *Für beliebige Zahlen $a$ und $b$ gilt:*

$$a - b = a + (-b).$$

*Subtraktion ist also Addition der Gegenzahl. Damit ist auch:*

$$a - (-b) = a + b.$$

*Beweis.* Es ist zu zeigen, dass $a + (-b)$ die Gleichung $x + b = a$ löst:

$$[a + (-b)] + b = a + [(-b) + b] = a + 0 = a.$$

Daraus folgt:

$$a - (-b) = a + [-(-b)] = a + b.$$

□

**Beispiel 2.2.** *Subtraktion ganzer Zahlen:*

- $(-5) - 4 = (-5) + (-4) = -9$

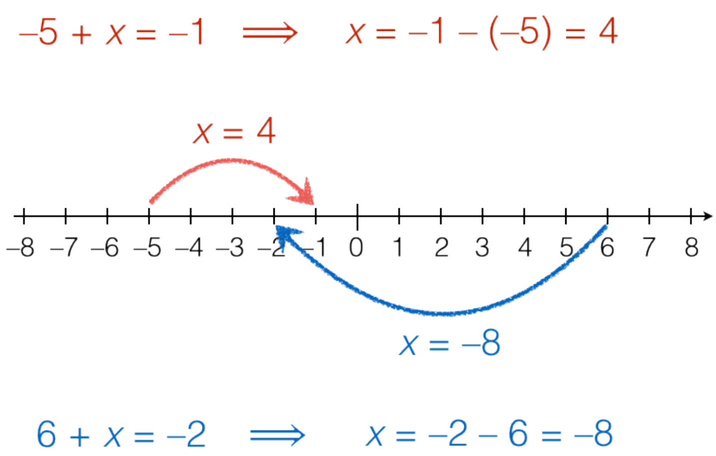


Abbildung 2.1: Subtraktion in $\mathbb{Z}$

- $1 - (-10) = 1 + 10 = 11$
- $-12 - (-3) = -12 + 3 = -9$

Grafisch beantwortet die Subtraktion $a - b$ die Frage: "Wie muss ich hüpfen, um **von** $b$ **nach** $a$ zu kommen? Dies ist in Abb. 2.1 illustriert.

**Satz.** *Gegenzahl von Summen und Differenzen:*

*(a)* $-(a + b) = -a - b$
*(b)* $-(a - b) = -a + b = b - a$

*Insbesondere besagt die letzte Identität, dass beim Vertauschen von Minuend und Subtrahend sich nur das Vorzeichen der Differenz ändert.*

*Beweis.* Wir nutzen die Tatsache, dass eine Gegenzahl $-x$ als Subtraktion $0 - x$ geschrieben werden kann:

(a)

$$\begin{aligned} & -(a+b) \\ = \; & 0 - (a+b) \\ = \; & 0 - a - b \\ = \; & -a - b. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
& -(a-b) \\
= \;& 0-(a-b) \\
= \;& 0-a+b \\
= \;& -a+b \\
= \;& b+(-a) \\
= \;& b-a.
\end{aligned}$$

□

Diese neuen Rechengesetze erweitern unseren Werkzeugkasten zum Vereinfachen von Termen.

**Beispiel 2.3.**

*(a)*

$$\begin{aligned}
& (9x-3y)-(-8x-3y+z) \\
= \;& 9x-3y+8x+3y-z \\
= \;& (9+8)x+(-3+3)y-z \\
= \;& 17x-z
\end{aligned}$$

*(b)*

$$\begin{aligned}
& -2xy(4a+b) \\
= \;& -(2xy\cdot 4a+2xy\cdot b) \\
= \;& -(8axy+2bxy) \\
= \;& -8axy-2bxy
\end{aligned}$$

**Beispiel 2.4.** *Faktorisieren:*

$$\begin{aligned}
& 3x(a-b)+(b-a) \\
= \;& 3x(a-b)-a+b \\
= \;& 3x(a-b)-(a-b) \\
= \;& (3x-1)(a-b)
\end{aligned}$$

---

**Übung 2.1.** *Berechne:*

(a) $|-30-(-69)+(-100)|$
(b) $-11+24-(0-31)$

**Übung 2.2.** *Vereinfache:*

(a) $(5a-2b)-(-3a+7b)-(6a-8b)$
(b) $-3x(y-4z)+4z(2x-3y)-(-3xy)$

**Übung 2.3.** *Die heute übliche, nach dem schwedischen Naturforscher Anders Celsius (1701–1744) benannte Temperaturskala ist so festgelegt:*

- *0 °C = Gefrierpunkt von Wasser (bei Normaldruck)*
- *100 °C = Siedepunkt von Wasser (bei Normaldruck)*

*Nur wenige wissen, dass Celsius seine Skala ursprünglich genau anders herum definierte: 0 °C war der Siedepunkt und 100 °C der Gefrierpunkt von Wasser! Erst sein Landsmann Carl von Linné (1707–1788) drehte die Skala in die heute übliche Form um.*

*Wenn wir mit $x$ einen Temperaturwert in der üblichen (neuen) Skala bezeichnen und mit $y$ den entsprechenden in der alten Skala gemessenen Wert, so gilt also die Umrechnungsformel*

$$y = 100 - x.$$

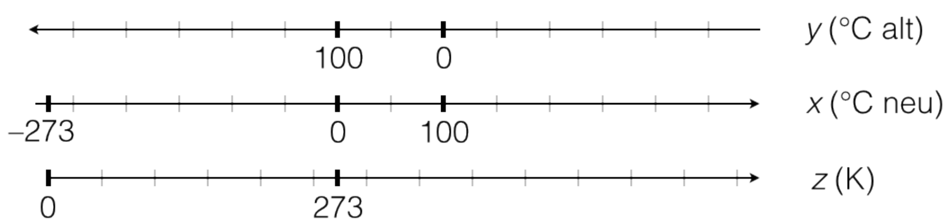


Abbildung 2.2: Alte und neue Celsius-Skala und Kelvin-Skala

(a) *Vervollständige die Tabelle:*

| $x$ (°C neu) | $y$ (°C alt) |
|---|---|
| 37 | |
| 148 | |
| −31 | |
| | 85 |
| | 254 |
| | −478 |

(b) *Die tiefste mögliche Temperatur ("absoluter Nullpunkt") ist −273 °C (neu). Welchem grössten möglichen Wert in der alten Skala entspricht das?*
(c) *In der Physik wird noch eine andere Skala verwendet, das* ***Kelvin*** *(K), die beim absoluten Nullpunkt beginnt: also 0 K = −273 °C und 0 °C = 273 K. Drücke $z$ = Temperatur in K als Term in $x$ aus.*
(d) *Wie viel Kelvin beträgt die menschliche Körpertemperatur (37 °C neu)?*
(e) *Drücke $z$ als Term in $y$ aus und vereinfache.*

**Übung 2.4.** *Faktorisiere:*

(a) $q(r-s)+(r-s)$
(b) $a(b-4)+2c(4-b)$
(c) $-y-2$

**Übung 2.5.** *Ein Verlag bereitet die Erstauflage des neuesten Buchs in der Reihe "Dr. Leuthard – Herzensbrecher wider Willen" von Lilamunde Plüscher vor. Die Druckkosten eines Exemplar belaufen sich auf 12 CHF, der Verkaufspreis ist 25 CHF. Zusätzlich erhält die Autorin ein Honorar von 500 000 CHF plus eine Tantieme von 6 CHF pro verkauftem Exemplar.*

(a) *Drücke die Ausgaben des Verlags (Druckkosten, Honorar + Tantiemen) als Term in $n$ = Anzahl verkaufter Exemplare aus.*
(b) *Drücke den Profit des Verlags (Einnahmen minus Ausgaben) als Term in $n$ aus.*
(c) *Es wurden $n$ = 62 000 Exemplare verkauft. Hat der Verlag Profit oder Verlust gemacht und wie viel?*
(d) *Drücke den Profit des Verlags als Term in $n$ und den allgemeinen Variablen*

- $d$ = *Druckkosten pro Exemplar*
- $v$ = *Verkaufspreis*
- $h$ = *Honorar*
- $t$ = *Tantieme pro verkauftem Exemplar*

*(alles in CHF) aus.*

## 3 Multiplikation und Division

**Definition.** *Die **Multiplikation** wird mit einer einzigen neuen Regel auf alle ganzen Zahlen erweitert: Multiplikation mit* $-1$ *ergibt die Gegenzahl, d. h.*

$$(-1)a = a(-1) = -a.$$

Multiplikation und Gegenzahlbildung vetragen sich folgendermassen:

**Satz.** *Für beliebige Zahlen* $a$ *und* $b$ *gilt:*

*(a)* $(-a)b = a(-b) = -ab$ *("Minus mal Plus ergibt Minus")*
*(b)* $(-a)(-b) = ab$ *("Minus mal Minus ergibt Plus")*

*Beweis.*

(a) $(-a)b = (-1)ab = -ab$ und $a(-b) = ab(-1) = -ab$
(b) $(-a)(-b) = -[a(-b)] = -(-ab) = ab$ (doppeltes Herausziehen eines Minuszeichens ergibt doppelten Vorzeichenwechsel von $ab$, also $ab$ selbst)

□

Für Produkte mit mehr als zwei Faktoren gilt:

- Enthält das Produkt eine **gerade** Anzahl (2, 4, 6, ...) **negativer** Faktoren, so ist das Produkt **positiv**.

- Enthält das Produkt eine **ungerade** Anzahl (1, 3, 5, ...) **negativer** Faktoren, so ist das Produkt **negativ**.

Die Distributivgesetze im Kapitel zu den natürlichen Zahlen gelten auch in ganz $\mathbb{Z}$, denn sie beruhen auf denselben Grundeigenschaften von $+$ und $\cdot$ und der Definition der Subtraktion.

**Beispiel 3.1.** *Klammern auflösen mit Gegenzahlen und negativen Zahlen:*

*(a)*

$$\begin{aligned} & -a - \{b - a + [-b + (-a)] - (-b + a)\} \\ = \; & -a - \{b - a - b - a + b - a\} \\ = \; & -a - (b - 3a) \\ = \; & -a - b + 3a \\ = \; & 2a - b. \end{aligned}$$

*(b)*

$$
\begin{aligned}
& x(-5t)+[-2tx+(-t)(y-x)-4(-yt+5xt)] \\
= \; & -5tx-2tx-t(y-x)-4(-yt+5xt] \\
= \; & -7tx-ty+tx+4ty-20tx \\
= \; & (-7+1-20)xt+(-1+4)ty \\
= \; & -26tx+3ty.
\end{aligned}
$$

Mit der Multiplikation ist auch die Division in $\mathbb{Z}$ definiert: $a:b$ ist die Lösung der Gleichung $x \cdot b = a$. Wie schon vorher ist diese Gleichung in $\mathbb{Z}$ nicht immer lösbar, die dafür nötige Zahlenmenge sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ (nächstes Kapitel).

Division und Gegenzahlbildung vertragen sich wie bei der Multiplikation:

**Satz.** *Für beliebige Zahlen $a$ und $b$ gilt:*

*(a)* $(-a):b=-a:b$
*(b)* $a:(-b)=-a:b$
*(c)* $(-a):(-b)=a:b$

*Beweis.*

(a) $(-a:b)\cdot b=-(a:b\cdot b)=-a$, dann Division durch $b$
(b) $(-a:b)\cdot(-b)=(a:b)b=a$, dann Division durch $-b$
(c) $(-a):(-b)\cdot b=(a:b)b=a$, dann Division durch $b$

□

Wieder gilt das Distributivgesetz zwischen $\pm$ and $:$ auch in ganz $\mathbb{Z}$.

**Beispiel 3.2.** *Vereinfachen von Divisionen mit Gegenzahlen und negativen Zahlen:*

$$
\begin{aligned}
& [-(-5a)+b]:(-5)-(a-(-b)):5-(a+7b):(-5) \\
= \; & -(5a+b):5-(a+b):5-[-(a+7b):5] \\
= \; & -(5a+b):5-(a+b):5+(a+7b):5 \\
= \; & [-(5a+b)-(a+b)+(a+7b)]:5 \\
= \; & [-5a-b-a-b+a+7b]:5 \\
= \; & (-5a+5b):5 \\
= \; & 5(b-a):5 \\
= \; & b-a.
\end{aligned}
$$

**Übung 3.1.** *Multipliziere aus und vereinfache:*

(a) $-(4x-4y)\cdot(-5)$
(b) $(-9+4x-3)(-4y)$
(c) $-3(p+8)+2(-5p)-\big(-6p+2-3[-9p-(p-1)-7]+4p\big)$

**Übung 3.2.** *Von einem Festgeldkonto werden an jedem letzten Tag eines Monats 4500 CHF abgebucht. Am 1. Januar 2016 beträgt der Saldo 152 000 CHF.*

(a) *Drücke den Saldo des Kontos $n$ Monate nach dem 1. Januar 2016 als Term in $n$ aus.*
(b) *Wie hoch wird der Saldo am 1. August 2017 sein?*
(c) *Berechne den Saldo am 1. März 2015 mit einem passenden Wert für $n$.*

**Übung 3.3.** *Vereinfache:*

(a) $-72kt:(-24k)$
(b) $(15xy+5ax):(-5x)$
(c) $-(8apq-12bpq):(-pq)$
(d) $(x-y):(y-x)$
(e) $5\cdot(-12at+20ut-6tx):[-(-2t)]-t[-4u+a-(-x)]:(-t)$