Grundbegriffe der Algebra

Definition. *Ein **Term** ist ein Rechenplan, in dem **Variablen** Platzhalter für Zahlenwerte sind. Die Werte von Variablen sind entweder noch nicht gesetzt, noch nicht bekannt oder beliebig wählbar.*

*Werden konkrete Werte für die Variablen eingesetzt und der Wert des Terms ausgerechnet, wird das eine **Bewertung** des Terms genannt.*

*Zwei Terme heissen **äquivalent** (gleichwertig), wenn sie bei jeder Bewertung (mit denselben Variablenwerten) den gleichen Wert haben.*

Beispiel 1. *Die Bewertung des Terms $3a + 5 - b^2$ für die Werte $a = 4$ und $b = 2$ ergibt:*

$$(3 \cdot a + 5 - b^2)\Big|_{a=4,b=2} = 3 \cdot 4 + 5 - 2^2 = 12 + 5 - 4 = 13.$$

Um zu zeigen, dass zwei Terme **nicht** äquivalent sind, genügt es, eine Bewertung zu finden, die nicht den gleichen Wert ergibt. Aber Beispiele von Bewertungen reichen nicht aus, um zu zeigen, **dass** zwei Terme äquivalent sind. Die Rechengesetze der Algebra beschreiben, welche Arten von Termen äquivalent sind. Mit ihnen kann ein Term Schritt für Schritt in äquivalente Terme **umgeformt** werden, bis er möglichst einfach ist.

Im folgenden Kapitel werden die vier Grundrechenarten in den natürlichen Zahlen beschrieben. Die Subtraktion und Division können hier aber nur eingeschränkt ausgeführt werden. In späteren Kapiteln wird der Zahlbereich auf die ganzen Zahlen und danach die rationalen Zahlen erweitert, um diese Einschränkungen zu überwinden. Dabei lernen wir nach und nach eine Reihe von Rechengesetzen kennen, mit denen am Ende jeder Term aus den vier Grundrechenarten in seine einfachste Form vereinfacht werden kann.

Übung 1. *Berechne die Werte der Terme*

$$3x \cdot (x^2 + 3xy + y) \text{ und } (3x^2 - xy + y) \cdot (x + 4y)$$

für:

(a) $x = 1,\ y = 2$
(b) $x = 2,\ y = 0$
(c) $x = 2,\ y = 1$

Sind die Terme äquivalent?

Übung 2. *Herr H. und seine Freundin sind gerade aus dem Urlaub wieder nach Hause gekommen. Bei den Urlaubskosten (Flüge, Unterkunft, Essen, usw.) haben sie sich abgewechselt, jetzt wollen sie die Kosten ausgleichen. Dabei haben die beiden unterschiedliche Ansichten, wie der Ausgleich zu berechnen ist. Seine Freundin meint:*

> *"Zuerst zählen wir die Kosten zusammen und halbieren das. So viel muss jeder von uns am Ende ausgegeben haben. Dann ziehen wir davon den kleineren der beiden Beträge ab. So viel muss der, der weniger ausgegeben hat, dem anderen überweisen."*

Herr H.:

> *"Wir müssen die **Differenz** halbieren. Dieser Betrag muss überwiesen werden."*

(a) *Drücke beide Rechenpläne als Terme in den Variablen a = Ausgaben von Herrn H. und b = Ausgaben seiner Freundin (beides in CHF) aus. Nimm dabei an, dass $a < b$.*
(b) *Bewerte die Terme mit $a = 860$ und $b = 1125$. Wer muss wem wie viel überweisen?*
(c) *Bewerte die Terme mit $a = 1040$ und $b = 772$. Wie kann man das Ergebnis interpretieren?*
(d) *Sind die Terme äquivalent? Kannst du das begründen?*

Lösungen zu den Übungen

1 (a) 27 und 27; (b) 24 und 24; (c) 66 und 66; (d) nein

2 (a) $(a+b):2-a$ und $(b-a):2$; (b) beide Male 132,50; (c) beide Male -134; (d) ja