Ähnlichkeit

Inhaltsverzeichnis

1 Ähnliche Figuren

Definition 1.1. *Zwei Figuren $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ heissen* ***ähnlich*** *(Kurzschreibweise $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$), wenn die eine so zentrisch gestreckt werden kann, dass das Bild kongruent zur anderen Figur ist. Dann sind die Längenverhältnisse und Winkel in beiden Figuren gleich gross (Abb. 1.1).*

Die Kombinationen von zentrischen Streckungen und Kongruenzabbildungen heissen **Ähnlichkeitsabbildungen**. Diese bestehen also aus:

- Drehungen
- Parallelverschiebungen
- Achsenspiegelungen
- (neu) zentrischen Streckungen sowie
- Kombinationen dieser vier.

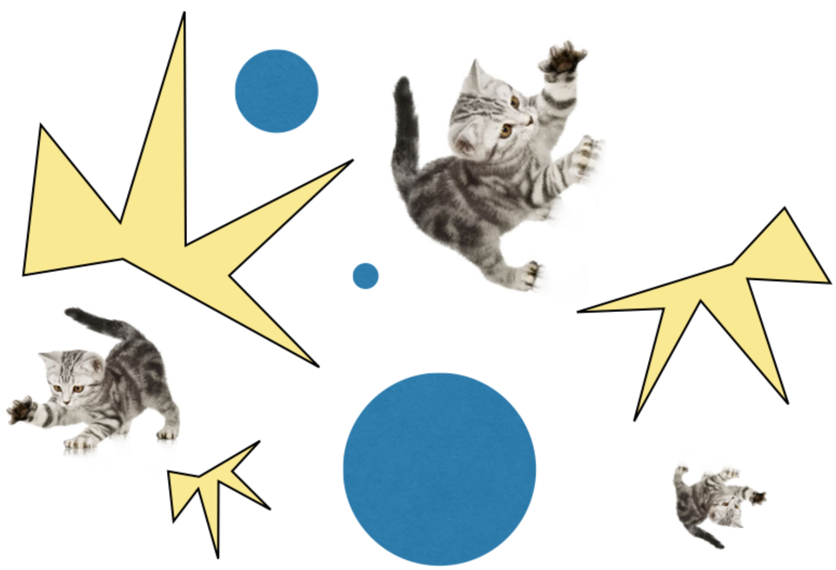


Abbildung 1.1: Ähnliche Figuren

Beim Abbilden einer Figur $\mathcal{F}_1$ auf eine ihr ähnliche Figur $\mathcal{F}_2$ ist nur eine zentrische Streckung erforderlich, die entweder vor oder nach einer passenden

Kongruenzabbildung ausgeführt wird. Dabei ist der Längenfaktor (Betrag des Streckfaktors) der zentrischen Streckung durch die Streckenlängen in $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ festgelegt:

Definition 1.2. *Zwischen zwei ähnlichen Figuren $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$ heisst das Längenverhältnis $k = a_2 : a_1 > 0$ einander entsprechender Strecken a_1 und a_2 der* ***Ähnlichkeitsfaktor von $\mathcal{F}_1$ nach $\mathcal{F}_2$*** *(Achtung Reihenfolge!). Der Ähnlichkeitsfaktor von $\mathcal{F}_2$ nach $\mathcal{F}_1$ ist das umgekehrte Längenverhältnis $a_1 : a_2 = \frac{1}{k}$.*

Auf Landkarten ist oft ein Massstab in der Form "$1 : k$" angegeben, wobei k eine grosse natürliche Zahl ist. Das bedeutet, der Ähnlichkeitsfaktor der Abbildung Realität $\to$ Karte ist $\frac{1}{k}$. Längen in der Realität sind daher k Mal so lang wie auf der Karte. Wenn auf einer Karte mit Massstab $1 : 25\,000$ eine Länge von 6 cm gemessen wird, dann entspricht dies einer realen Entfernung von $25\,000 \cdot 6$ cm $= 150\,000$ cm $= 1500$ m $= 1{,}5$ km.

Satz 1.1. *Zwei Dreiecke sind genau dann ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.*

Beweis. Es seien zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$, die in den Winkeln $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$ übereinstimmen (Abb. 1.2). Strecke das erste Dreieck so an einem beliebigen Punkt, dass $\overline{A_1'B_1'} = \overline{A_2B_2}$. Dann gilt wegen der Winkeltreue der zentrischen Streckung $\alpha_1' = \alpha_1$ und $\beta_1' = \beta$. Die Dreiecke $A_1'B_1'C_1'$ und $A_2B_2C_2$ sind also kongruent (Kongruenzsatz WSW), d. h. die ursprünglichen Dreiecke sind ähnlich: $A_1B_1C_1 \sim A_2B_2C_2$. $\square$

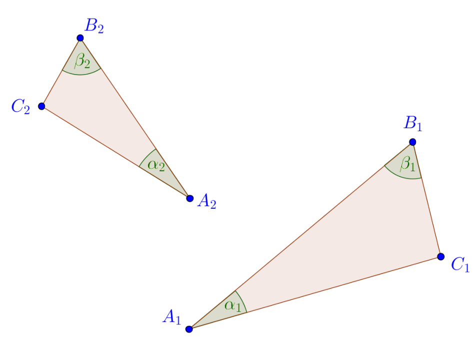
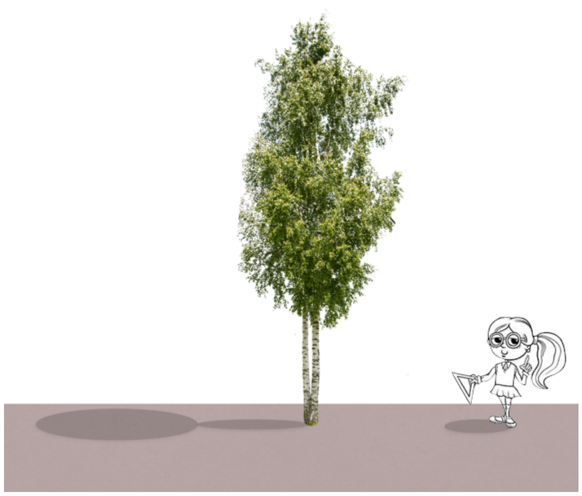


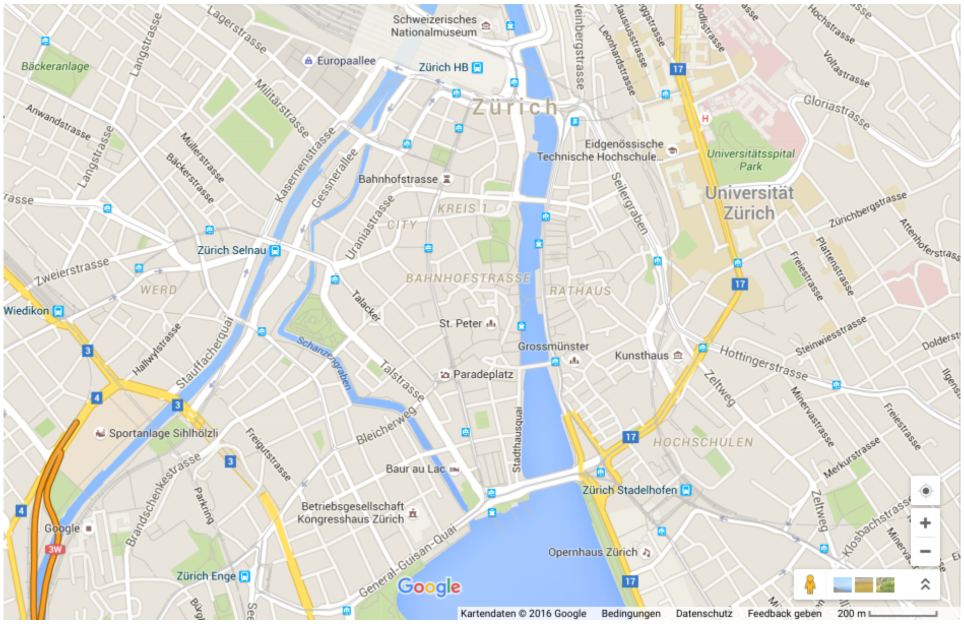
Abbildung 1.2: Ähnliche Dreiecke

Übung 1.1. *Birke (Mädchen) möchte die Höhe einer Birke (Baum) bestimmen. Sie misst den Schatten des Baums (3,72 m) sowie ihren eigenen (1,04 m). Mit Hilfe ihrer Körpergrösse (1,61 m) kann sie nun die Höhe der Birke finden, wie?*



Übung 1.2. *Bestimme durch Messen die Ähnlichkeitsfaktoren zwischen den ähnlichen Figuren in Abb. 1.1.*

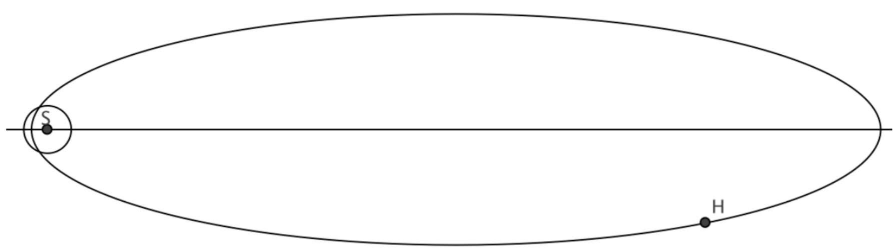
Übung 1.3. *Dies ist eine Karte der Zürcher Innenstadt.*



(a) *Bestimme den Massstab der Karte.*

(b) *Wie weit ist es vom Hauptbahnhof bis zum Opernhaus (Luftlinie)?*

Übung 1.4. *Dies ist eine Abbildung der Bahn des Halleyschen Kometen (H) um die Sonne (S). Links zum Vergleich die kreisförmige Erdbahn (Radius: 149,6 Mio. km).*



(a) *Bestimme den Massstab der Abbildung.*

(b) *Wie weit ist die grösste Entfernung des Halleyschen Kometen von der Sonne?*

Übung 1.5. *Ein Bergsteiger steht auf einem 3700 m hohen Berg und erfreut sich dank klaren Wetters einer exzellenten Sicht. Er fragt sich, wie weit er blicken kann. In der Ferne, direkt über einem weiteren Gipfel, kann er den Dom von Mailand (Milano) erkennen. Auf seiner Karte im Massstab von 1 : 25 000 sind die beiden Gipfel 3,9 cm voneinander entfernt und die Höhe ist mit 3670 m angegeben.*

Unter Vernachlässigung der Erdkrümmung und unter der Annahme, dass Milano etwa 100 m ü. M. liegt, kann er die Distanz bestimmen. Wie?